

VITTORIO EM. III

FONDO PIZZOFALCONE



BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadic

XXXX



Palchetto

Num.° d'ordine

113

23466

N.° 16

48

NAZIONALE

B. Prov.

I

285

NAPOLI

R. BIBLIOTECA

VITT. EM. III

B. 1.2x

1.2x

1.2x

1.2x

2

66Gh38.

NOUVEAUX

PRINCIPES

DE MÉCANIQUE,

OUVRAGE dans lequel , après avoir donné l'exposition de ces principes , tels que l'Auteur se propose de les démontrer dans un Cours , on relève quelques-unes des erreurs capitales des Mécaniciens , et l'on démontre en particulier la fausseté des deux équations fondamentales , qu'ils prennent pour base de tous leurs calculs sur les mouvements variés ;

PAR le citoyen MURAZ , ancien Ingénieur des mines de Poullaouen et Huelgoat , pour la partie des Machines.

A PARIS,



Chez { COURCIER , rue Poupée-André-des-Arts , n.º 6.
FUSCHS , rue des Mathurins , maison de Cluny.
BERNARD , quai des Augustins , n.º 31.
et l'AUTEUR , rue Contrescarpe , n.º 9 , près l'Estrapade.

A Orléans , chez BERTEVIN.

A Périgueux , chez la veuve DUBREUILLE.

AN VIII.

On trouve chez les mêmes Libraires les
Observations sur les Incommensurables, où
l'on prouve qu'il n'y a point de rapport numé-
rique entre la *Circonférence* et le *diamètre* ;
par le même Auteur.

P R E F A C E

L'AUTEUR de cet écrit ne l'a entrepris que parce qu'il a acquis, sur la mécanique, des idées absolument neuves et de la plus haute importance. Il ne s'agit de rien moins que de rectifier les premiers principes d'une science qui fait partie de celles auxquelles on a donné par excellence le nom de *sciences exactes*. Mais dans l'état où se trouve actuellement la Méchanique, il s'en faut bien qu'elle soit digne de ce nom, et si on en excepte la partie qui traite de l'équilibre et des centres de gravité, tout le reste est plein d'erreurs, ensorte qu'il n'est peut-être pas de science plus inexacte que celle-là.

Cependant les plus grands géometres de ce siècle se sont beaucoup occupés de cette branche des Mathématiques, et depuis l'invention du calcul différentiel et intégral, ils ont cru que rien ne pouvoit les arrêter, ils se sont livrés à des calculs sans fin, terminés par des formules immenses, qui étonnent ou ef-

fraient ceux qui ne les regardent que de loin , et c'est avec ces formules qu'ils prétendent résoudre les problèmes les plus difficiles. Mais il s'en faut bien que ces solutions soient exactes ; et comment pourroient-elles l'être , étant fondées , pour la plupart , sur de faux principes ? Les efforts que les Mécaniciens ont fait à cet égard , sont très-louables , sans doute , mais on regrette qu'ils se soient donné tant de peines infructueuses , faute d'avoir établi leurs calculs sur des bases solides et inébranlables. Il ne suffit pas d'entreprendre un long voyage , et de se mettre promptement en marche , l'important est de choisir la véritable route ; car si on en prend une qui s'écarte à droite ou à gauche , on s'égarera d'autant plus , qu'on aura fait plus de chemin. Enfin , nous pouvons le dire hardiment , malgré tous les efforts des plus grands géomètres , la Mécanique , cette science si utile , est encore dans l'enfance , ou plutôt , c'est un édifice informe qui s'écroule sur ses propres bases , et doit être reconstruit à neuf .

Ce petit écrit est partagé en deux parties :

la premiere contient le tableau analytique des nouveaux principes que nous démontrerons dans notre Cours et dans l'ouvrage que nous donnerons au public quand il sera achevé; la seconde renferme quelques articles tirés littéralement de cet ouvrage. Les principes exposés dans la premiere partie, étonneront sans doute par leur nouveauté; peut-être même taxera-t-on mon entreprise de témérité ou de forfanterie. Pour montrer qu'elle ne mérite aucune de ces qualifications, j'ai senti qu'il étoit indispensable de citer quelques morceaux de mon ouvrage, dans lesquels chaque matiere est suivie des preuves qui m'ont parues les plus propres à en faire sentir la vérité: ce sont en quelque sorte des échantillons par lesquels on pourra juger de tout le reste. Si, comme on ose s'en flatter, les vérités que nous entreprenons d'établir dans ces articles particuliers, paroissent rigoureusement démontrées aux yeux de tout lecteur judicieux et impartial, je le prie d'être persuadé que tous les autres principes, dont il ne trouvera ici que le simple énoncé, sont établis dans notre ouvrage avec

la même évidence et la même certitude mathématique.

Dans le premier article , extrait de cet ouvrage ; nous montrons la fausseté de deux équations fondamentales , que les Mécaniciens prennent pour base de tous leurs calculs sur les mouvements variés. L'erreur des géomètres sur cette matiere , vient de ce qu'ils ont conclu faussement du particulier au général ; parce que les deux équations dont nous parlons , sont vraies dans les mouvements uniformément accélérés , ils ont cru qu'elles le sont aussi dans toute espece de mouvement , quelque varié qu'il soit , c'est-à-dire , quelle que soit la variation des forces accélératrices qui agissent sur les corps. Nous nous sommes attachés non-seulement à prouver la fausseté de cette conséquence ; mais encore à faire sentir en quoi consiste précisément l'illusion des Mécaniciens sur cette matiere , et à la montrer pour ainsi dire au doigt.

Le second article extrait de notre ouvrage , est un examen critique de la démonstration fondamentale de Bezout , sur la résistance di-

recte des fluides. On sait par expérience que cette résistance est comme le quarré de la vitesse. Bezout voulant calculer cette même résistance , s'est efforcé de trouver une expression qui renfermât le quarré de la vitesse. Mais il n'a pas pris garde qu'il n'arrive à ce quarré , que parce que dans la suite de son raisonnement , une erreur se trouve compensée par une autre. Il y a donc , comme nous l'observons dans cet écrit , une double erreur dans la démonstration de Bezout ; 1°. il a cru que la résistance constante , celle qui a lieu à la rencontre de chaque tranche de fluide , est proportionnelle à la simple vitesse , tandis qu'elle est comme le quarré de cette vitesse ; 2°. il a cru que la résistance qui a lieu pendant une même unité de temps , est comme le quarré de la vitesse , tandis que cette dernière résistance est comme le cube de la vitesse.

Au reste , ces défauts que nous reprochons à Bezout , ne lui sont point particuliers ; on les retrouve dans tous les auteurs qui , en calculant la résistance des fluides , sont arrivés au quarré de la vitesse : ils confondent

tous deux especes de résistances , celle qui a lieu à la rencontre de chaque tranche du fluide , avec celle qui subsiste pendant une même unité de temps ; et pour calculer la première, ils nous donnent une fausse expression de la seconde. Je pourrois citer tous les géometres modernes qui ont entrepris de déterminer le mouvement des fluides ; mais en relevant ici les défauts des Mécaniciens , je me suis fait une loi de ne citer aucun auteur vivant , et parmi ceux qui sont morts, je choisis Bezout, parce que son ouvrage est un des plus répandus et des plus estimés.

Les nouveaux principes que j'expose dans cet écrit , étant de la plus haute importance , je ne doute point que les sociétés savantes ne prennent le parti de s'en occuper. En effet , la plus noble fonction de ces sociétés , sur-tout de celles qui jouissent de la protection et des bienfaits du Gouvernement , est , à mon avis , de consacrer par leur sanction , les vérités neuves qui éclosent de temps en temps pour le bonheur de l'humanité , comme de condamner à un éternel oubli , par leur improbation , les erreurs qui

pullulent plus souvent et plus audacieusement encore que les vérités. Si , comme j'ose le présumer , l'Institut National se décide à prendre en considération mes nouveaux principes , je l'invite à s'occuper d'abord de l'article où je démontre la fausseté des équations fondamentales des mouvements variés ; les autres articles viendront ensuite , et je lui fournirai successivement tous mes mémoires imprimés ou manuscrits. Assurément rien ne mérite plus son attention ; car quel objet plus digne d'occuper une société savante , que celui où il s'agit de fixer les premiers principes d'une science aussi utile que la Mécanique.

Quelque parti que prenne l'Institut à cet égard , je me décide à prendre celui de faire un Cours , dans lequel je démontrerai tous les principes énoncés dans cet écrit. J'aurai soin de faire ensorte que mes démonstrations soient à la portée de tout le monde , même de ceux qui n'ont qu'une très-petite idée des Mathématiques , ou qui n'en connoissent qu'autant qu'il en faut pour entendre un Cours de Physique expérimentale. Quelques-

uns même de ces principes , peuvent se démontrer par le seul raisonnement , sans faire aucun usage ni de l'Algebre , ni de la Géométrie. Tels sont ceux que nous établissons sur l'estimation des forces , et que nous déduisons immédiatement des lois qui s'observent dans les mouvements uniformément accélérés , et dans la chute des corps. De l'examen attentif de ces lois , résulte nécessairement deux vérités ; 1°. que la force d'un corps qui tombe librement , ou le choc qu'il produira sur l'obstacle invincible qui l'arrête dans sa chute , est toujours comme le quarré de la vitesse dont il est animé à l'instant du choc ; 2°. que de quelque maniere qu'un corps se meuve , quelle que soit sa direction et la nature de la cause qui le met en mouvement , le choc qu'il produira sur l'obstacle invincible qui l'arrête dans son passage , est toujours comme le quarré de la vitesse dont il étoit animé avant le choc.

La premiere de ces deux vérités a été aperçue par Leibnitz , la seconde n'a été vue par personne ; l'une et l'autre nous conduisent à notre théorie du choc des corps durs et des corps élastiques , théorie bien dif-

férente , comme l'on voit , de celle qui fut imaginée par Wallis , Wren et Huyghens , et adoptée ensuite par tous les Géomètres et les démonstrateurs de physique expérimentale. Ceux-ci répètent encore les mêmes expériences qui furent imaginées par le célèbre Mariotte. Mais ; ce qu'il y a de particulier , c'est que ces expériences prouvent précisément le contraire de ce qu'on veut établir. Les Physiciens , par une méprise qui ne se conçoit pas , prennent pour les mesures des vitesses les arcs décrits par les boules , ou les sinus de ces arcs , tandis que ces arcs ou ces sinus , en les supposant très-petits , indiquent à-peu-près les quarrés des vitesses. Il faut donc , dans toutes les expériences des Physiciens , sur le choc des corps , effacer le mot *vitesse* , et mettre à sa place ceux-ci *le quarré de la vitesse*. Au moyen de cette correction , que le bon sens commande impérieusement , chacun verra sans peine que toutes les expériences dont nous parlons , prouvent la vérité de notre nouvelle théorie sur le choc des corps , et montrent par conséquent la fausseté de celle que l'on a adoptée jusqu'à ce jour.

Fautes à corriger.

Pag. 6, n°. XVI, ligne 8, *parcourt*, lisez *parcouru*.

Pag. 10, lig. 19, *vitte*, lisez *vitesse*.

Pag. 23, lig. 4, *pour*, lisez *par*.

Pag. 26, lig. 23, $y = \frac{-MV + mV \pm 2mu}{H + m}$, lisez....

$$y = \frac{-MV + mV \pm 2mu}{M + m}.$$

Pag. 29, lig. 17, *présentons*, lisez *présenterons*.

Idem, lig. pénultième, (Fig. 1, 2, 3), lisez (Fig. 7, 8, 9).

Pag. 30, lig. 1, *après*, lisez *avec*.

Pag. 31, lig. 3, (Fig. 1), lisez (Fig. 7).

Pag. 48, lig. 26, ajoutez en marge (Fig. 10)

Pag. 49, lig. 18, effacez *AD — ds*.

Pag. 65, lig. 2, *d'un*, lisez *dém*.

Pag. 75, lig. 12, (*XCXVII*), lisez (*CI*).

Pag. 93, lig. 25, (*XCXVI*), lisez (*XCVII*).

Pag. 94, lig. 5, (*XCXIII*), lisez (*XCIV*).

NOUVEAUX

NOUVEAUX

PRINCIPES

DE MÉCANIQUE.

PREMIERE PARTIE.

*Tableau analytique des nouveaux principes ,
que l'on démontrera dans ce Cours.*

COMME la mécanique a principalement pour but de déterminer les effets des corps, qui réagissent les uns sur les autres, et que ces effets dépendent absolument de la force de chaque corps, il est nécessaire avant tout d'avoir un moyen sûr et invariable de connoître ces forces. Ainsi un des premiers principes de la mécanique doit être celui de l'estimation des forces.

Aussi voyons-nous que la plupart des auteurs commencent par là ; ils s'accordent tous à dire que la force d'un corps *est égale à sa quantité de mouvement*, c'est-à-dire, *au produit de sa masse par sa vitesse*. Mais ce principe trivial, admis par habitude, plutôt que par raison, est absolument faux, et nous démontrerons les propositions suivantes.

I.

La force proprement dite d'un corps n'est

A

2 NOUVEAUX PRINCIPES

jamais égale au produit de sa masse par sa vitesse.

I I.

Le produit de la masse par la vitesse n'est pas même l'expression générale des effets des corps, et il ne les indique qu'en certains cas seulement.

I I I.

Une force en mécanique étant nécessairement l'action d'un corps sur un autre, et cette action ne pouvant s'exercer que de deux manières, il ne peut y avoir que deux espèces de forces; savoir, la force constante, par laquelle un corps agit sur un autre, avec un effort constant et uniforme; et la force de percussion, qui a lieu lorsqu'un corps heurte brusquement un obstacle invincible, qui l'arrête dans son passage.

I V.

La force constante et uniforme, celle qui réitère son action à chaque instant, est toujours égale à un poids exprimé par nM , M étant la masse du corps, et n un nombre quelconque, qui peut se déterminer dans tous les cas.

V.

La force de percussion, ou le choc avec lequel un corps frappe l'obstacle invincible, qui l'arrête dans son passage, est égale au produit de la masse, par le quarré de sa vi-

tesse, et l'expression de cette force est toujours MV^2 , M étant la masse du corps, et V sa vitesse.

V I.

Quelques fois pour avoir la force de percussion, il faut ajouter à la masse M du corps en mouvement, une autre masse nM , ce qui a lieu lorsque cette masse ou ce poids nM , représente la force constante et uniforme, dont le corps M est animé; et alors si ce corps vient à rencontrer un obstacle invincible, la force avec laquelle il le frappera, est exprimée par $(nM + M)V^2$, c'est-à-dire, qu'elle est égale au produit de la somme des deux masses par le quarré de la vitesse, qui a lieu à l'instant du choc.

V I I.

Si un corps, qui se meut avec une vitesse quelconque, rencontre sur son passage une suite d'obstacles, qui l'arrêtent successivement et annéantissent peu-à-peu sa force et sa vitesse, ce qui est le cas du mouvement retardé, alors, dans quelque instant qu'on le considère, sa force égale au produit MV^2 de la masse par le quarré de sa vitesse.

V I I I.

Tous les corps lancés dans l'air ou dans tout autre milieu, étant dans le cas des mouvemens retardés, et n'ayant qu'une force de

4 NOUVEAUX PRINCIPES
percussion , cette force est toujours égale au produit de la masse M par le quarré V^2 de la vitesse. Ainsi la force avec laquelle une balle ou un boulet frappe contre un mur , est toujours égale au produit de la masse par le quarré de sa vitesse , à l'instant du choc.

I X.

Pour donner une vitesse double à un corps que l'on lance dans le vuide , il faut le chasser avec une force quadruple ; pour lui donner une vitesse triple , il faut le pousser avec une force neuf fois plus grande ; et en général pour donner à un corps M une vitesse V , il faut le pousser avec une force MV^2 .

X.

Si le corps que l'on lance , doit se mouvoir dans un milieu résistant , comme l'eau ou l'air , il faut encore que la force avec laquelle on le chasse pour lui donner la vitesse V , augmente à proportion de la densité du milieu.

Ces dernières propositions doivent servir de base à la théorie qui fixe les proportions qu'il faut donner aux canons , aux mortiers , et généralement à toutes les bouches à feu , pour en obtenir l'effet que l'on se propose.

X I.

De la Force comparée avec son effet.

Les mécaniciens ont eu tort de confondre

en général la force avec son effet ; la force de percussion est la même chose que son effet , mais la force constante en diffère essentiellement.

X I I.

La force constante d'un corps M étant représentée par nM , et la nature de cette force étant de réitérer son action à chaque instant , pour avoir son effet au bout d'un temps quelconque , il est nécessaire de multiplier nM par l'espace E parcouru pendant ce temps , ou par la vitesse V avec laquelle il est parcouru ; l'expression générale de l'effet pour ces sortes de forces , est donc nMV , qui se réduit à MV en certains cas seulement.

X I I I.

Des Forces accélératrices constantes.

Dans le mouvement uniformément accéléré , les forces absolues des corps ne sont point proportionnelles à leurs vitesses finales , comme le prétendent les mécaniciens , mais aux quarrés de ces mêmes vitesses.

X I V.

La force d'un corps , qui tombe librement , n'est point égale au produit de la masse M par sa vitesse finale V , mais au produit MV^2 de la masse par le quarré de sa vitesse.

X V.

La somme des efforts employés par une force accélératrice constante , sur un corps qu'elle fait mouvoir dans le vuide , n'est point proportionnelle à la vitesse qu'elle lui communique , comme le disent les mécaniciens , mais à l'espace qu'elle lui fait parcourir en le poussant , ou au quarré de la vitesse , dont il est animé au bout de cet espace.

X V I.

Chaque impulsion de la force accélératrice ne donne point aux corps , qu'elle met en mouvement , un nouveau degré de vitesse égal au premier , comme le pensent les mécaniciens. Le second degré de vitesse produit par la seconde impulsion , est plus petit que le premier ; le troisieme plus petit que le second , etc. En général l'espace parcourt au bout d'un temps quelconque , étant partagé en parties égales , et ces parties étant marquées par les nombres 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , etc. Les degrés de vitesse , communiqués au mobile par chaque impulsion successive , sont comme les nombres 1 , 0.41421 , 0.31784 , 0.26795 , etc.

X V I I.

Un corps quelconque étant lancé de bas en haut , et tombant ensuite librement de la même hauteur , si on partage la ligne verticele , qu'il

décrit, soit en montant, soit en descendant, en autant de parties égales que l'on voudra, les forces absolues, dont ce corps sera animé à chaque point de division, sont en proportion arithmétique, abstraction faite de la résistance de l'air, et de tout autre milieu. La même chose auroit également lieu, si le corps rouloit sur un plan incliné, et dans ce cas, il faudroit encore faire abstraction de la résistance occasionnée par les frottemens.

Nous opposerons cette vérité incontestable à un théorème absolument faux, qui se trouve dans les principes mathématiques de la philosophie naturelle de Neuton. (*Neuton philos. natur. prncipia mathem. Tom. 2. page 61. Propos. 8. Théorème 6.*)

XVIII.

Des mouvemens variés, ou des mouvemens des corps poussés par des forces accélératrices variables.

Toutes les grandes théories des mécaniciens sur cette matiere, sont établies sur ces deux équations $u = \frac{ds}{dt}$, et $p = \frac{du}{dt} (a)$, dans lesquelles p représente la force accélératrice qui agit sur le mobile, u la vitesse acquise au bout du temps t , de l'espace parcouru pendant l'instant infiniment dt , et du la vitesse acquise pendant cet instant.

(a) Mécanique de Bezout, nos. 209, 210, 211, etc.

8 NOUVEAUX PRINCIPES

Nous prouverons que ces deux équations , qui sont bonnes pour les mouvemens uniformément accélérés , sont fausses pour tous les mouvemens variés , c'est-à-dire , pour les mouvemens des corps poussés par des forces accélératrices variables. Cependant les mécaniciens prétendent résoudre tous les problèmes relatifs à ces mouvemens ; mais les calculs immenses , par lesquels ils croient y arriver , étant fondés sur deux équations absolument fausses , ne peuvent donner que des résultats erronnés.

X I X.

Des Forces vives et des Forces mortes.

Une force en mécanique étant , comme nous l'avons dit , l'action d'un corps sur un autre , et ce qui est actif étant nécessairement en vie , il ne peut y avoir de forces *mortes*. La distinction des forces en *vives* et en *mortes* , est donc souverainement ridicule. Aussi n'en sera-t-il point question dans ce Cours , et si nous en parlons , ce ne sera qu'historiquement , et pour en faire sentir l'absurdité.

X X.

Nous n'admettrons pas même le fameux principe de la conservation des forces vives ; car un tel principe suppose nécessairement la distinction des forces en *vives* , et en d'autres regardées comme non-*vives* , et par conséquent comme *mortes*. Si ce principe renferme quelque vérité ,

vérité, elle doit s'énoncer autrement. A reste, nous démontrerons que les calculs par lesquels les mécaniciens sont arrivés à ce principe, sont faux.

X X I.

Du choc des corps durs.

Toutes les formules des mécaniciens sur cette matière sont fausses. Cependant les démonstrateurs de physique font un grand nombre d'expériences, par lesquelles ils prétendent confirmer les principes des mécaniciens, et nous ne dirons point que ces expériences sont fausses; car une expérience étant un fait, ne peut jamais être fausse; elle présente toujours un phénomène certain, une vérité indubitable. Mais celui qui la dirige, peut en tirer de fausses conséquences, et alors c'est le démonstrateur qui est en défaut, et non l'expérience. Voilà précisément le cas où se trouvent tous les physiciens, qui répètent, sur le choc des corps, les expériences de Nollet, comme Nollet a répété celle de Mariotte.

X X I I.

Ces expériences, comme on sait, se font avec des boules suspendues par des fils, et que l'on fait choquer de différentes manières. Par exemple, pour les corps non-élastiques, on prend d'abord deux boules de terre molle d'une égale grosseur, que nous pouvons re-

présenter par *A* et *B*. Sur une regle horison-tale se trouvent deux échelles graduées, l'une pour la boule *A*, qui est à droite, l'autre pour la boule *B*, qui est à gauche. On écarte la boule *A* jusqu'à ce que le fil qui la soutient, ré-ponde au sixieme degré de l'échelle qui est à droite. Cette boule étant ensuite abandonnée à son propre poids, va frapper la boule *B*, qui est en repos, et après le choc, elles se meu-vent toutes deux du même côté, et ne s'ar-rêtent que lorsque le fil, qui supend la boule *B*, répond au troisieme degré de l'échelle, qui est à gauche. Voilà l'effet résultant de cette ex-périence, et voici la conséquence que l'on en tire.

Lorsqu'un corps non élastique B, que l'on suppose en repos, vient à être choqué par un autre corps A, de même nature et de même masse que le premier, la vitesse, qui a lieu après le choc, est la moitié de celle, dont le corps choquant A étoit animé avant qu'il rencon-trât le corps B.

Mais rien n'est plus faux que cette consé-quence. 1°. Les espaces parcourus par les corps, avant et après le choc, sont mesurés par des arcs, et ces arcs ne sont point propor-tionnels aux lignes droites, marqués sur les fils de suspension. 2°. On ne devroit pas oublier que pour mesurer les vitesses des corps en mouvement, il ne suffit pas de connoître les espaces parcourus; car dans le mouvement uniforme, les vitesses sont, comme les espaces

parcourus , divisés par les temps employés à les parcourir ; et dans le mouvement uniformément accéléré , les vitesses sont comme les racines quarrées des espaces parcourus. Les physiciens n'ignorent point ces principes, mais ils les oublient totalement quand ils font leurs expériences sur le choc des corps , et ils prennent pour la mesure des vitesses , avant et après le choc , des lignes droites , qui n'indiquent pas même les espaces parcourus. C'est une méprise révoltante , et qui est cependant commune à tous les démonstrateurs de physique expérimentale.

X XIII.

On n'a pas senti toute la difficulté de faire des expériences exactes sur le choc des corps non élastiques. 1°. Est-on bien sûr que les boules de terre , dont on se sert , sont absolument privées de toute élasticité ? Si elles en avoient un peu , leur mouvement , après le choc , ne seroit pas le même. En supposant , par exemple , que la masse de la boule choquée *B* est double de celle de la boule choquante *A* , si ces masses avoient un peu d'élasticité , la boule *A* , après la dilatation des ressorts , tendroit à revenir sur ses pas , mais étant retenue par son adhérence avec la boule *B* , elle ralentiroit la vitesse de la masse totale , et l'empêcheroit de monter à la hauteur , à laquelle elle se seroit élevé , s'il n'y avoit point eu d'élasticité. A cet inconvénient s'en joint

un autre provenant des fils de suspension, qui n'étant point attachés à un même appui, et se trouvant à peu près parallèles quand les boules sont réunies, les gênent dans leur marche, et diminuent leur ascension.

X X I V.

Mais quand même ces inconvénients n'existeroient point, et en supposant que les expériences, dont nous parlons, puissent se faire d'une manière rigoureuse, on n'en pourroit encore rien conclure pour l'objet qu'on se propose. Il s'agit de trouver les vitesses des corps dans les deux instants qui précèdent et qui suivent immédiatement le choc, et rien dans ces expériences ne pourra jamais indiquer les vitesses; car de vouloir les mesurer par les arcs que décrivent les boules, ou par des lignes droites parcourues par les fils de suspension, c'est une illusion grossière, et je dirois presque une dérision.

X X V.

Pourquoi d'ailleurs recourir à des expériences sur un objet où la théorie est si claire, qu'elle ne nous laisse rien à désirer? La véritable théorie des forces accélératrices constantes, et en particulier de la chute des corps, nous apprend,

1°. Que la vitesse de la boule choquante *A*, est égale à la racine quarrée de la hauteur verticale, d'où elle est tombée, et par conséquent

que cette vitesse est égale à la racine quarrée du sinus verse de l'arc, qu'elle a décrit en tombant ;

2°. Que la vitesse des deux boules *A* et *B*, immédiatement après le choc, est égale à la racine quarrée de la hauteur verticale, à laquelle peut s'élever leur centre de gravité, et par conséquent que cette vitesse est comme la racine quarrée du sinus verse de l'arc décrit par le centre de gravité des deux boules en remontant ;

3°. Que la force avec laquelle la boule *A* frappe la boule *B* en repos, est proportionnelle à la hauteur verticale d'où elle est tombée, et par conséquent au sinus verse de l'arc qu'elle a décrit en tombant ;

4°. Que la force, dont les deux boules *A* et *B* sont animées après le choc, est aussi proportionnelle à la hauteur verticale, à laquelle peut s'élever leur centre de gravité, et par conséquent au sinus verse de l'arc, que ce centre décrira en s'élevant.

XXVI.

Il est aisé, d'après ces principes, de déterminer dans tous les cas, les vitesses des deux boules *A* et *B*, avant et après le choc. Par exemple, la boule *A* venant à choquer la boule *B*, elle doit entraîner celle-ci, et s'élever avec elle à une certaine hauteur. Mais la

boule *B* étant égale à la boule *A* en poids et en volume ; il est évident que , abstraction faite des frottemens et de la résistance de l'air , la hauteur verticale , à laquelle s'élevera le centre de gravité des deux boules , doit être exactement la moitié de celle à laquelle s'élèveroit le centre de gravité de la boule *A* , si elle ne rencontroit aucun obstacle. Or cette dernière hauteur est égale à celle d'où la boule *A* est tombée , ou au sinus verse de l'arc qu'elle a décrit en tombant. Représentant donc par 2 ce sinus verse , et par 1 le sinus verse de l'arc décrit par le centre de gravité des deux boules après le choc , il est évident que la vitesse de la boule *A* , à l'instant où elle frappe la boule *B* , est à celle des deux boules après le choc , comme $\sqrt{2}$ à $\sqrt{1}$, comme $\sqrt{2}$ à 1 , ou à peu près comme 14 à 10. La vitesse des deux boules après le choc , est donc un peu plus des deux tiers de celle dont le corps *A* est animé à l'instant qui précède immédiatement le choc. Cela ne s'accorde pas , comme l'on voit , avec la prétention des physiciens , qui croient démontrer par leurs expériences , que ces deux vitesses sont entr'elles dans le rapport de 2 à 1 , parce qu'en effet les espaces parcourues par les fils de suspension , sont à peu près dans ce rapport. Mais , comme nous l'avons observé , prendre ces espaces pour les mesures des vitesses , c'est le comble du ridicule.

XXVII.

Puisque la théorie nous fournit un moyen sûr de déterminer dans tous les cas les vitesses des deux boules *A* et *B*, avant et après le choc, il s'ensuit que toutes les expériences que l'on pourroit faire à cet égard, même en les supposant exactes, ne seroient qu'un jeu et un amusement : telles qu'elles se sont faites jusqu'ici, c'est un amusement dangereux, puisqu'on s'en sert pour insinuer des erreurs capitales, et étayer la fausse théorie des mécaniciens sur le choc des corps. Voici le principe sur lequel toute cette théorie est fondée.

Lorsqu'un corps dur A vient à choquer un autre corps dur B, soit que celui-ci soit en repos, soit qu'il se meuve directement devant l'autre avec une moindre vitesse, la quantité de mouvement perdue par le corps A, est égale à la quantité de mouvement gagnée par le corps B.

Ce principe est absolument faux. Cependant les mécaniciens en déduisent l'équation de la vitesse, qui a lieu après le choc ; car représentant par *M* et *m* les masses des deux corps *A* et *B*, par *V* la vitesse du corps *A* avant le choc, par *u* celle de *B*, et par *x* la vitesse commune aux deux corps après le choc, ils trouvent $x = \frac{MV + mu}{M + m}$. Mais cette expression de la vitesse est aussi fausse que le principe, d'où elle est tirée ; ce n'est jamais

16 NOUVEAUX PRINCIPES

d'après les quantités de mouvement , c'est-à-dire , d'après les produits des masses par les vitesses que l'on peut juger des vitesses des corps , avant et après le choc.

XXVIII.

Le vrai principe fondamental de la théorie du choc des corps qui se meuvent librement , est celui-ci : *La force de percussion perdue par le corps choquant A , est égale à la force de percussion gagnée par le corps choqué B , que nous supposerons d'abord en repos , ou se mouvant dans le même sens , et suivant la même direction que le corps A.* Tel est le principe qu'il faut substituer à celui que les mécaniciens ont adopté jusqu'ici.

XXIX.

Appellant donc M la masse du corps choquant A , et V sa vitesse avant le choc , m la masse du corps choqué B , et u sa vitesse avant le choc ; enfin nommant x la vitesse commune aux deux corps après le choc , la force de percussion dont le corps M se trouve animé avant le choc , est MV^2 , et sa force de percussion après le choc , est Mx^2 ; de même la force de percussion du corps B avant le choc , est mu^2 , et sa force de percussion après le choc , est mx^2 . D'où il suit que la force de percussion perdue par le corps A , est $MV^2 - Mx^2$, et que la force de percussion gagnée par le corps B ,
est

est $Mx^2 - mu^2$. Nous avons donc, d'après notre principe, $MV^2 - Mx^2 = mx^2 - mu^2$, ce qui donne $x^2 = \frac{MV^2 + mu^2}{M+m}$, et $x = \sqrt{\frac{MV^2 + mu^2}{M+m}}$.

X X X.

Lorsque la masse choquée m va directement à la rencontre du corps choquant M , la formule des mécaniciens pour ce cas, est $x = \frac{MV - mu}{M+m}$, x étant toujours la vitesse qui a lieu après le choc. Notre formule pour ce même cas, est $x = \sqrt{\frac{MV^2 - mu^2}{M+m}}$. En effet, la force de percussion perdue par le corps choquant M , est $MV^2 - Mx^2$, et la force de percussion gagnée par le corps m , dans le sens opposé à son premier mouvement, est.... $mx^2 + mu^2$. Nous devons donc avoir, d'après notre principe, $MV^2 - Mx^2 = mx^2 + mu^2$, par conséquent, $x^2 = \frac{MV^2 - mu^2}{M+m}$, et.....
 $x = \sqrt{\frac{MV^2 - mu^2}{M+m}}$.

L'expression générale de la vitesse pour tous les cas du choc des corps non élastiques, est, selon les mécaniciens, $x = \frac{MV \pm mu}{M+m}$. Mais cette formule étant absolument fautive, et ne donnant jamais la vitesse x , qui a lieu après le choc, nous la remplacerons par celle-ci,
 $x = \sqrt{\frac{MV^2 \pm mu^2}{M+m}}$, et nous montrerons qu'elle

est établie sur des principes aussi incontestables que les premières vérités de Géométrie.

X X X I.

Du choc des corps élastiques.

Les formules des mécaniciens sur cet objet, ne sont pas plus exactes que celles qu'ils donnent sur le choc des corps durs ; et cela n'est point étonnant, puisque celles-ci conduisent directement aux autres. On distingue deux cas.

1°. Lorsque le corps choquant M , et le corps choqué m vont dans le même sens avec des vitesses V et u , la vitesse y de M après le choc, est, selon les mécaniciens, $y = \frac{MV - mV + mu}{M + m}$, et la vitesse z du corps choqué m , est $z = \frac{2MV - Mu + mu}{M + m}$.

2°. Lorsque le corps choqué m va au-devant du corps choquant M , que l'on suppose animé d'une plus grande force, la vitesse y de M , après le choc, est $y = \frac{MV - mV - mu}{M + m}$, et la vitesse z du corps m , est $z = \frac{2MV + Mu - mu}{M + m}$.

Telles sont les formules d'après lesquelles les mécaniciens veulent que l'on calcule les vitesses des corps élastiques M et m , après le choc ; mais ces formules sont fausses, et elles ne donneront jamais les valeurs des vitesses que l'on cherche.

XXXII.

Véritables formules des vitesses des corps élastiques, après le choc.

Si nous appelions x la vitesse commune, qu'aurent les deux corps élastiques M et m , après que leurs ressorts seront entièrement comprimés, cette vitesse sera la même que si les deux corps étoient absolument sans aucune élasticité, et par conséquent nous avons

$x = \sqrt{\frac{MV^2 \pm mu^2}{M+m}}$. La force du corps M dans cet état, sera Mx^2 , et puisque avant le choc il avoit la force MV^2 , sa force perdue par la compression des ressorts est $MV^2 - Mx^2$. Mais la réaction des ressorts lui en fera perdre encore autant; donc il perdra $2MV^2 - 2Mx^2$, et par conséquent il ne lui restera que la force $MV^2 - 2MV^2 + 2Mx^2 = 2Mx^2 - MV^2$. Si nous appelions présentement y la vitesse dont le corps M sera animé après que les ressorts auront entièrement produit leur effet, sa force sera My^2 , et nous aurons $My^2 = 2Mx^2 - MV^2$; donc $y^2 = 2x^2 - V^2$, ou $y^2 = \frac{2MV^2 \pm 2mu^2}{M+m} - V^2$, et finalement $y^2 = \frac{MV^2 \pm 2mu^2 - mV^2}{M+m}$.

La force du corps choqué m étant mu^2 avant le choc, sa force, après que les ressorts seront entièrement comprimés, sera mx^2 . Il aura donc gagné la force $mx^2 \mp mu^2$, le signe supérieur étant pour le cas, où il va devant le corps M ,

et le signe inférieur pour celui où il va à la rencontre de M avant le choc. Mais la dilatation des ressorts procurera encore au corps m une force égale à celle qu'il a acquise par leur compression ; donc sa force acquise par l'effet total du choc, sera $2mx^2 \mp 2mu^2$, à laquelle il faut joindre la force $\pm mu^2$, que ce corps avoit avant le choc, dans le sens du corps choquant M ; sa force totale après le choc, sera donc $2mx^2 \mp 2mu^2 \pm mu^2 = 2mx^2 \mp mu^2$. Or si nous représentons par z la vitesse dont le corps se trouvera animé après le choc, sa force sera mz^2 ; nous avons donc $mz^2 = 2mx^2 \mp mu^2$, et $z^2 = 2x^2 \mp u^2$, ou, en mettant à la place de x^2 sa valeur prise dans l'équation ci-dessus, $z^2 = \frac{2MV^2 \pm mu^2 \mp Mu^2}{M+m}$.

Les vitesses des deux corps M et m ; après le choc, sont donc $y = \sqrt{\frac{MV^2 \pm 2mu^2 - mV^2}{M+m}}$ et $z = \sqrt{\frac{2MV^2 \pm mu^2 \mp Mu^2}{M+m}}$. Ces formules satisfont à tous les cas ; car dans les termes précédés de deux signes, celui qui est au-dessus est pour le cas où le corps m va devant le corps choquant M avec une moindre vitesse, et le signe inférieur est pour le cas où m va directement à la rencontre de M . Si m est en repos avant le choc, sa vitesse u est zéro, et alors tous les termes où u se trouve dans les deux formules, étant nuls, les restes donnent les valeurs de y et z pour ce cas.

XXXIII.

Au reste on peut , sans recourir à ces deux formules , déterminer les deux inconnues y et z . En effet l'équation $y^2 = 2x^2 - V^2$ trouvée ci-dessus , montre que le carré de la vitesse du corps M , après le choc , est égale au double du carré de la vitesse que les deux corps auroient après le choc , s'ils étoient sans ressorts , moins le carré de la vitesse de M avant le choc ; et l'équation $z^2 = 2x^2 \mp u^2$ nous dit que pour avoir le carré de la vitesse de m après le choc , il faut prendre le double du carré de la vitesse qu'auroient les deux corps après le choc , s'ils étoient sans ressorts , et en retrancher ou y ajouter le carré de la vitesse , que m avoit avant le choc , selon que son mouvement étoit dans le même sens , ou en sens contraire de celui du corps M .

XXXIV.

On voit sans peine que par le corps choquant M , nous entendons toujours celui qui , avant le choc , est animé d'une plus grande force , et par conséquent nous supposons constamment que MV^2 est plus grand que mu^2 . Ainsi après la compression des ressorts , les deux corps continueront à marcher dans le sens de M avec la vitesse x . Mais lorsque la force du corps M n'est pas beaucoup plus

grande que celle du corps choqué m , il peut arriver que par le débandement des ressorts, le corps M soit obligé de revenir sur ses pas, ce qui arrivera toutes les fois que l'on aura V^2 plus grand que $2x^2$; car l'équation $y^2 = 2x^2 - V^2$ montre qu'alors la vitesse y sera en moins, c'est-à-dire que le mouvement du corps M sera en sens contraire de celui qu'il avoit avant le choc, et que sa vitesse, suivant cette nouvelle direction, sera $y = \sqrt{V^2 - 2x^2}$, ou $y = \sqrt{\frac{mV^2 \pm 2mu^2 - MV^2}{M + m}}$. On voit que cette dernière expression de la vitesse y ne diffère de la première, que nous avons trouvée ci-dessus, que par le changement des signes.

A l'égard de la vitesse z du corps m , son expression est toujours la même, soit que le corps M , après la dilatation des ressorts, continue de marcher suivant sa première direction, soit qu'il retourne sur ses pas, c'est-à-dire, qu'on a toujours $z = \sqrt{\frac{2MV^2 \pm mu^2 \pm Mu^2}{M + m}}$.

X X X V.

Les mécaniciens, en réfléchissant sur les formules qu'ils donnent pour les vitesses des corps élastiques après le choc, ont cru y voir le fameux *principe de la conservation des forces vives*.

« En effet, disent-ils, soit que les deux corps
 » élastiques M et m aillent dans le même sens
 » avant le choc, soit qu'ils viennent à la ren-

» contre l'un de l'autre , la somme des produits des masses par les quarrés des vitesses après le choc , sera toujours égale à la somme des produits des masses pour les quarrés des vitesses avant le choc.

» Cela se démontre aisément par le calcul ; car 1°. lorsque les corps vont d'un même côté avant le choc , la somme des produits des masses par les quarrés des vitesses après le choc , est $M \left(\frac{MV - mV + 2mu}{M + m} \right)^2 + m \left(\frac{2MV - Mu + mu}{M + m} \right)^2$, quantité qui devient , après toutes les réductions , $MV^2 + mu^2$, somme des produits des masses par les quarrés des vitesses avant le choc. 2°. Si les deux corps viennent à la rencontre l'un de l'autre , la somme des produits des masses par les quarrés des vitesses après le choc , est

» $M \left(\frac{MV - mV - 2mu}{M + m} \right)^2 + m \left(\frac{2MV + Mu - mu}{M + m} \right)^2$,

» expression qui se réduit pareillement à $MV^2 + mu^2$ ».

Ces mécaniciens observent avec raison que la même chose n'a pas lieu dans le choc des corps durs , c'est-à-dire , qu'alors la somme des produits des masses par les quarrés des vitesses après le choc , n'est point égale à la somme des produits des masses par les quarrés des vitesses avant le choc , ce qui est vrai dans leur manière de calculer. D'où il falloit conclure , ce me semble , que le principe de la conservation des forces vives n'a pas lieu

dans le choc des corps non-élastiques, et que par conséquent ce principe n'est pas général. A moins qu'on ne dise que les forces des corps non-élastiques ne sont pas *vives*; mais alors on se jette dans un autre inconvénient; car selon ces mêmes mécaniciens, *la force vive est celle de tout corps en mouvement*; or les corps non-élastiques ne peuvent se choquer sans se mouvoir, et ils sont si bien en mouvement, que l'on calcule leurs vitesses avant et après le choc. Voilà le *galimatias* dans lequel tombent les mécaniciens par leur manière de calculer, et leur prétendu *principe de la conservation des forces vives*.

XXXVI.

Il est évident qu'ici les mécaniciens n'arrivent à ce principe que parce qu'ils calculent mal les vitesses des corps après le choc; car en prenant ces vitesses d'après nos formules, on trouvera, 1^o. que dans le choc des corps durs, comme dans celui des corps élastiques, la somme des produits des masses par les quarrés des vitesses après le choc, est égale à la somme des produits des masses par les quarrés des vitesses avant le choc, toutes les fois que les deux corps M et m vont dans le même sens avant et après le choc; 2^o. que, quels que soient les corps M et m , élastiques ou non, s'ils vont en sens contraire avant le choc, et s'ils se meuvent ensuite l'un
et

et l'autre suivant la première direction de M , la somme des produits des masses par les carrés des vitesses après le choc, est égale au produit de la masse M du corps choquant par le carré V^2 de sa vitesse avant le choc, moins le produit de la masse m du corps choqué par le carré u^2 de sa vitesse avant le choc ; 3°. que lorsque les corps M et m sont élastiques, si m va en sens contraire de M avant le choc, et si M est forcé de retourner sur ses pas par la réaction des ressorts, la somme des produits des masses par les carrés des vitesses après le choc, n'est égale ni à la somme, ni à la différence des produits des masses par les carrés des vitesses avant le choc.

On peut se convaincre de tout ceci par le calcul. En effet, 1°. dans le choc des corps durs, la somme des produits des masses par les carrés des vitesses après le choc, est $(M + m) x^2 = (M + m) \left(\frac{MV \pm mu}{M + m} \right)^2 = M V^2 \pm mu^2$, et lorsque les corps M et m sont élastiques, et que M continue, après le choc, d'aller suivant sa première direction, la somme des produits des masses par les carrés des vitesses après le choc est $M v^2 + m z^2 = M \left(\frac{MV \pm 2mu^2 - mV^2}{M + m} \right) + m \left(\frac{2MV^2 \pm mu^2 \mp Mu^2}{M + m} \right) = M V^2 \pm mu^2$, somme ou différence des produits des masses par les carrés des vitesses avant le choc.

* D

2°. Lorsque m va à la rencontre de M avant le choc, et que le choquant M est forcé de revenir sur ses pas par la réaction des ressorts, la somme des produits des masses par les quarrés des vitesses après le choc, est $Mv^2 + mz^2 = M \left(\frac{mV^2 + 2mu^2 - MV^2}{M + m} \right) + m \left(\frac{2MV^2 - mu^2 + Mu^2}{M + m} \right)$, quantité qui ne donne ni la somme $MV^2 + mu^2$, ni la différence $MV^2 - mu^2$ des produits des masses par les quarrés des vitesses avant le choc, excepté le cas où l'on a $m = M$, et $u = V$.

XXXVII.

Lorsque les deux corps M et m vont dans le même sens avant et après le choc, la quantité de force doit toujours être la même, parce qu'alors ce qui est perdu par le choquant M passe entièrement dans le choqué m ; et ceci ayant également lieu dans les corps durs comme dans les corps élastiques, il s'ensuit que, quelle que soit la nature de ces corps, on doit toujours avoir une même somme de force avant et après le choc. Mais, comme nous le prouverons dans notre Cours, les forces des corps qui se choquent, sont toujours égales aux produits de leurs masses par les quarrés des vitesses, dont ils sont animés à l'instant du choc; donc dans le cas dont nous parlons, la somme des produits des masses par les quarrés des vitesses après le choc, doit toujours être égale à la somme des produits des masses par les quarrés des vitesses avant le choc, quelle que soit d'ailleurs la nature des corps

M et m , et c'est aussi ce qui a lieu, comme le montrent nos formules.

Mais lorsque m vient à la rencontre de M avant le choc, et qu'ensuite les deux corps vont suivant la première direction de M , la force perdue par le choc est nécessairement double de celle dont le corps m étoit animé avant le choc; elle est donc $2mu^2$, et puisque, avant le choc, la somme de force étoit $MV^2 + mu^2$, elle se réduit après le choc à $MV^2 + mu^2 - 2mu^2 = MV^2 - mu^2$; c'est-à-dire, que dans ce cas la somme de force, ou, ce qui est la même chose, la somme des produits des masses par les quarrés des vitesses après le choc, est égale à la différence des produits des masses par les quarrés des vitesses avant le choc, comme le montrent nos formules.

Enfin lorsque le corps choquant M revient sur ses pas, par l'effet du choc, la perte de force varie, elle n'est point $2mu^2$, comme dans le cas précédent, quelquefois même elle est nulle, comme lorsqu'on a $M=m$, et $V=u$, et voilà pourquoi nos formules disent que dans ce cas la somme de force, ou la somme des produits des masses par les quarrés des vitesses après le choc, n'est généralement égale ni à la somme, ni à la différence des produits des masses par les quarrés des vitesses avant le choc.

XXXVIII.

Lorsque les deux masses élastiques M , et m

D 2

28 NOUVEAUX PRINCIPES

vont à la rencontre l'une de l'autre avant le choc, il y a un cas où M restera immobile après le choc, et par-conséquent sa vitesse y sera nulle; nous aurons donc $y = \frac{MV^2 - 2mu^2 - mV^2}{M + m} = 0$.

Mais si nous supposons $m = 1$, $u = 1$, $M = 2$, l'expression précédente devient.....

$2V^2 - 2 - V^2 = 0$, ce qui donne.....

$V^2 = 2$; et $V = \sqrt{2}$. Ainsi dans ce cas pour que le corps M s'arrête après le choc, il faut que sa vitesse avant le choc soit à celle du corps m comme $\sqrt{2}$ à 1, et par-conséquent, il faut que ces deux corps, en tombant, décrivent des arcs dont les sinus verses soient entre eux comme 2 à 1.

Si nous consultons les formules des mécaniciens pour ce même cas, nous trouvons que la vitesse V du corps M avant le choc doit être à la vitesse u du corps m , comme 2 à 1, et par-conséquent les sinus verses des arcs décrits par ces deux corps en tombant, devroient être dans le rapport de 4 à 1. Ainsi, la masse M étant double de m , et le sinus verse de l'arc décrit par m étant le quart du rayon, pour que la masse M s'arrête après le choc, il faut, selon la théorie des mécaniciens, que cette masse décrive avant le choc un arc de 90° , selon la nôtre, il suffit que cette masse décrive un arc de 60° . Que ceux qui aiment les expériences, s'attachent à celle-là, et ils verront laquelle des deux théories doit être préférée.

XXXIX.

Du Choc indirect.

Ici les erreurs des mécaniciens se multiplient ; car d'abord la théorie du choc indirect se déduit de celle du choc direct , et par conséquent les erreurs qui paroissent dans celle-ci , doivent nécessairement se retrouver dans l'autre ; de plus , en traitant du choc indirect , les mécaniciens sont souvent obligés de décomposer les forces des corps ; mais de la manière dont ils font cette opération , elle est absolument fautive , comme nous le dirons plus bas , et doit rendre par conséquent les résultats de leurs calculs encore plus erronés. Aussi tout est-il à refaire sur cet objet , comme sur le choc direct , et le travail que nous présentons là-dessus , ne ressemblera en rien à tout ce qui a été fait jusqu'ici.

L X.

De la Composition et Décomposition des Forces.

Les mécaniciens n'ont qu'un seul principe sur cet objet ; voici en quoi il consiste.

Lorsque deux forces représentées par AB et AD (Fig. 1 , 2 , 3) , poussent ou tirent un même corps A , suivant deux directions

AB, AD, si après deux autres lignes BC, DC, on forme le parallélogramme ABCD, une force représentée par la diagonale BC de ce parallélogramme produira sur le corps A le même effet que les deux forces AB, AD, en sorte que l'on peut substituer cette force unique aux deux autres, et réciproquement.

Les mécaniciens ne font ici aucune distinction ; ils appliquent ce principe à tous les cas, à l'équilibre comme au mouvement, au mouvement accéléré ou retardé, comme au mouvement uniforme. Mais c'est encore là une erreur capitale, et d'autant plus grande, que la composition et décomposition des forces se présente très-fréquemment en mécanique. Pour rectifier les idées à cet égard, nous distinguerons trois cas, et nous établirons sur cette matière trois principes au lieu d'un.

X L I.

Nouveaux Principes sur la Décomposition des Forces.

1^o. Lorsqu'il y a équilibre, la composition ou décomposition, telle qu'on l'a employée jusqu'ici, peut toujours se faire, quel que soit l'angle formé par les deux lignes *AB, AD*, qui représentent les deux forces composantes et leurs directions.

2^o. Dans le mouvement uniforme des forces constantes, la composition ou décomposition

ne peut avoir lieu que lorsque les directions AB , AD des deux forces composantes forment entre elles un angle droit (*Fig. 1*).

3°. Dans le mouvement accéléré ou retardé, et dans le choc des corps, la composition ou décomposition ne peut de même se faire que lorsque les directions AB , AD des deux forces composantes font entre elles un angle droit, comme dans le cas précédent, mais avec cette différence que, dans ce dernier cas, les deux forces composantes et la résultante ne doivent point se représenter par les trois lignes AB , AD , AC , mais par les quarrés $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ de ces mêmes lignes.

X L I I.

Dans l'état d'équilibre, le principe de la décomposition se prouve aussi rigoureusement que les premières vérités de Géométrie. Nous en donnerons plusieurs démonstrations, et nous en rapporterons même quelques-unes tirées de différens auteurs, entre autres celle de Stevin, mathématicien du prince Maurice de Nassau. Mais plus ces démonstrations sont évidentes, plus on voit qu'elles ne sont bonnes qu'en supposant l'équilibre.

X L I I I.

Il n'en est pas de même des démonstrations dans lesquelles on suppose que les corps sont

32 NOUVEAUX PRINCIPES

en mouvement. On les a multipliées à l'infini, chaque auteur en choisit une qu'il adopte, et rejette les autres. D'Alembert, après avoir donné la sienne, critique celle qui est la plus généralement reçue par les mécaniciens, mais il ne prend pas garde qu'au fond la sienne est absolument la même que celle qu'il censure, et qu'elle n'a d'autre mérite que d'être plus allongée. En parcourant toutes ces démonstrations dans les divers ouvrages qui en traitent, on voit qu'aucune ne réunit l'assentiment général, aucune, par conséquent, ne mérite le nom de démonstration proprement dite.

X L I V.

Il est néanmoins un cas où le principe de la décomposition des forces, appliqué au mouvement uniforme des corps, se démontre rigoureusement; c'est celui où les directions des deux forces composantes forment entre elles un angle droit; car alors les deux forces composantes AB , AD n'exerçant aucune action l'une sur l'autre, et ne pouvant par conséquent ni s'entre aider, ni se nuire, il faut de toute nécessité que le corps A , étant poussé à la fois par ces deux forces, décrive dans le sens de chacune d'elles, le même espace qu'il décrirait, s'il n'étoit poussé que par une seule. Or il ne peut remplir cette condition, qu'en décrivant la diagonale AC du parallélogramme. Donc dans ce cas, les deux forces composantes AB ,

AB , AD produiront le même effet qu'une force unique représentée par la diagonale AC , et réciproquement.

X L V.

Nous prouverons qu'en décomposant ainsi les forces des corps qui se meuvent uniformément, il n'en résulte aucune augmentation d'effet, et la preuve de cette vérité est facile à saisir. Les trois forces d'un même corps suivant trois directions, étant représentées par trois lignes AB , AD , AC , les trois vitesses de ce corps, suivant les directions de ces trois lignes, sont aussi représentées par ces lignes; or l'effet du corps, suivant chaque direction, est égal au produit de la force par la vitesse; donc ici les effets des trois forces sont repré-

sentés par les carrés $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ des trois lignes; mais AB et AD étant perpendiculaires entre elles, elles forment les deux petits côtés d'un triangle rectangle, dont AC est l'hypothénuse. Nous avons donc.....

$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$, et par conséquent l'effet de la résultante AC est égale à la somme des effets des deux forces composantes AB , AD . Il n'y a donc dans ce cas aucun inconvénient à substituer les deux forces composantes à la résultante, et réciproquement celle-ci aux deux autres, puisque, en faisant cette opération, on a toujours le même effet.

E =

XLVI.

Lorsque le mouvement des corps est accéléré ou retardé, comme le mouvement d'une pierre qui tombe, celui d'un boulet ou d'une balle lancés par la poudre, etc., pour que la décomposition soit bonne, il faut non-seulement que les directions des deux forces composantes soient perpendiculaires entre elles, comme dans le cas précédent, mais il est nécessaire de plus que les trois forces, suivant les trois directions AB , AD , AC , soient représentées par les quarrés $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, de ces trois lignes. En remplissant cette dernière condition, il est aisé de voir que la décomposition ne présente encore aucune augmentation d'effet; car $\overline{AB}$ et $\overline{AD}$ sont les quarrés des deux petits côtés d'un triangle rectangle, et $\overline{AC}$ est le quarré de l'hypothénuse; par conséquent l'effet ou la force $\overline{AC}$ de la résultante, est égale à la somme des effets ou des forces $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ des deux composantes.

XLVII.

La raison de cette différence que nous mettons entre les deux especes de mouvement, vient de ce que dans le mouvement uniforme l'effet est égal au produit de la force par la

vitesse, comme nous l'avons dit (XII), au lieu que dans le mouvement accéléré ou retardé, l'effet est simplement égal à la force. En effet dans le mouvement uniforme, chaque force réitérant son action toute entière à chaque instant infiniment petit, son effet est d'autant plus grand, qu'elle parcourt dans un temps donné un plus long espace, ou, ce qui revient au même, que sa vitesse est plus grande. Il faut donc, pour estimer les effets dans cette espèce de mouvement, multiplier les forces par les vitesses.

Mais lorsque le mouvement est accéléré ou retardé, l'effet n'est pas différent de la force. Si une balle a assez de force pour percer une planche, et qu'une autre balle de même grosseur en ait assez pour percer deux planches de la même épaisseur, nous en concluons que la dernière balle a une force double; et si nous voyons un marteau enfoncer un clou, et un autre marteau enfoncer deux clous de la même force et à la même profondeur, nous jugeons aussi tout de suite que la force du premier marteau n'est que la moitié de celle du second, sans nous mettre en peine des vitesses avec lesquelles les marteaux enfoncent les clous, ni de celles avec lesquelles les balles percent les planches. Nous jugeons donc ici de la force par l'effet, et de l'effet par la force, confondant ainsi l'une avec l'autre, parce que dans le vrai, il n'y a entre ces deux choses aucune différence.

XLVIII.

Il suit de là que si, dans le mouvement accéléré ou retardé, on représente les trois forces d'un même corps, suivant trois directions par trois lignes, comme le font tous les mécaniciens, ces trois lignes, qui forment toujours un triangle, représenteront aussi les effets du même corps suivant ses trois directions. D'où il résulte évidemment que lorsque le mouvement est accéléré ou retardé, la décomposition, telle qu'on l'a faite jusqu'ici, présente toujours une augmentation d'effet, par la raison bien simple qu'un côté quelconque d'un triangle, est toujours plus petit que la somme des deux autres côtés.

X L I X.

Nous prouverons qu'en décomposant ainsi la force d'un corps, dont le mouvement est accéléré ou retardé, en deux autres, puis chacune de ces deux-ci encore en deux autres, et ainsi de suite à l'infini, l'augmentation d'effet seroit réellement infinie, et nous indiquerons un procédé fort simple, avec lequel on pourroit, si cette décomposition étoit bonne, se procurer une somme d'effet aussi grande qu'on le voudroit, avec la plus petite force possible, ce qui est absurde.

Nous prouverons en second lieu qu'en ad-

mettant cette décomposition, telle que les mécaniciens l'ont faite jusqu'ici, et la font encore, il seroit très-facile de résoudre le fameux problème du mouvement perpétuel, ce qui est encore absurde.

Enfin nous donnerons la description d'une machine extrêmement simple, avec laquelle chacun pourra se convaincre qu'en décomposant la force d'un corps, dont le mouvement est accéléré ou retardé, les trois forces suivant les trois directions ne sont pas entre elles comme les trois lignes qui les représentent. Nous indiquerons le cas le plus simple, celui où les directions des deux forces composantes sont perpendiculaires entre elles, et on pourra se convaincre de mille manières que dans ce cas, la somme des deux forces composantes ou celle de leurs effets, est exactement égale à la force de la résultante ou à son effet, tandis que, d'après le principe de la décomposition admis par les mécaniciens, la somme des deux premières forces devroit être relativement à la dernière, à peu près dans le rapport de 3 à 2.

L.

Au reste ce ne sont point ces expériences qui m'ont conduit à ma théorie, mais c'est d'après ma théorie que j'ai imaginé ces expériences, non pour ajouter à ma conviction, mais pour faciliter celle des autres. Quand un

homme présente des idées neuves sur une matière de la plus haute importance, et surtout si ces idées renversent de grandes théories, données par des auteurs d'une réputation imposante, il doit s'attendre à être contredit, souvent même persécuté par ceux qui devroient être ses juges. Il faut donc qu'il invente des moyens de conviction à la portée de tout le monde. C'est ce qui m'a engagé à faire les expériences dont je parle, et à les indiquer aux autres. Chacun pourra, en les répétant, se convaincre de la vérité de mes principes, n'eût-il même que les plus légères notions de calcul et de géométrie.

A l'égard des personnes instruites, elles n'auront pas besoin de faire ces expériences; le plus léger examen des raisons sur lesquelles nous établirons notre théorie, suffira pour les en convaincre, et elles auront peine à revenir de leur étonnement, quand ensuite jettant un regard rétrograde sur les principes accrédités jusqu'à ce jour, elles verront jusqu'à quel point les idées des mécaniciens se sont embrouillées sur cette matière.

L I.

En effet ils confondent souvent l'équilibre avec le mouvement, le mouvement uniforme avec le mouvement accéléré ou retardé, et quand ils considèrent la manière avec laquelle se démontre le principe de la décomposition

appliqué à l'équilibre, frappés de l'évidence de cette démonstration, ils en concluent qu'elle est générale, et applicable à tous les cas, sans prendre garde qu'elle ne convient point au mouvement. Et lorsqu'ils s'aperçoivent d'une certaine augmentation d'effet qu'ils ne peuvent définir, ils disent en général que la décomposition présente une augmentation d'effet, parce que, ajoutent-ils, la somme des deux côtés d'un triangle est plus grande que le troisième, ne prenant pas garde que ce n'est point par cette raison que l'augmentation d'effet a lieu, puisque dans l'équilibre il n'y a point d'augmentation d'effet, puisque dans le mouvement uniforme, l'augmentation n'a lieu que lorsque les deux forces composantes ne forment point entre elles un angle droit, et qu'enfin ce n'est que dans les mouvemens accélérés ou retardés, que l'augmentation se montre dans tous les cas, et quelque soit l'angle formé par les directions des deux forces composantes.

L I I.

Quelques mécaniciens s'apercevant de cette augmentation d'effet, sans pouvoir dire précisément en quoi elle consiste, ni distinguer les cas où elle a lieu, d'avec ceux où elle n'existe pas, ont cru y voir une difficulté, et nous trouvons même dans les mé-

moires de l'Académie des Sciences, un rédacteur de ces mémoires, qui présente cette difficulté aux savans, et les invite à la résoudre. Mais d'Alembert, dans l'Encyclopédie, déclare que cette difficulté ne doit point arrêter, et qu'il faut passer outre. Aussi voyons-nous tous les mécaniciens, à son exemple et sur son invitation, passer outre en effet.

L I I I.

Mais d'Alembert avoit-il raison de parler ainsi ? non sans doute. Il est une vérité éternelle, claire, évidente par elle-même, et qui ne peut être détruite par aucun calcul, c'est que de telle manière que l'on combine la force d'un corps, en la décomposant, c'est-à-dire, en forçant ce corps à vaincre deux obstacles placés obliquement, au lieu d'un seul placé suivant sa direction naturelle, il est impossible qu'il en résulte une augmentation d'effet. Ainsi, dire que la décomposition présente une augmentation d'effet, c'est reconnoître que cette opération est absurde, et par conséquent impraticable. Il falloit donc examiner cette augmentation d'effet, voir en quoi elle consiste, et distinguer les cas où elle a lieu réellement, d'avec ceux où elle n'existe pas ; en un mot, il falloit chercher à résoudre cette difficulté, et ne point passer outre.

L I V.

L I V.

Des Frottements.

La mécanique purement spéculative ne s'occupe guère des frottements ; elle s'en débarrasse pour l'ordinaire , en les supposant nuls , ou infiniment petits. Mais la mécanique pratique , celle qui traite des machines en mouvement , et sur-tout des machines usuelles , ne peut pas se donner la même liberté ; elle est forcée de calculer la résistance des frottements , parce que cette résistance absorbe souvent une grande partie de la force motrice. Nous pouvons dire même que cet objet est en quelque sorte la tourmente des mécaniciens , et il mérite d'autant plus leur attention , que nous voyons une infinité de machines très-belles en apparence , et très-bien imaginées , rester néanmoins sans exécution à cause des frottements.

L V.

Mais si les frottements sont en quelque sorte le fléau de la mécanique , sous certains rapports , on peut dire que sous d'autres ils en sont les fondements. En effet , comment notre corps , qui sera toujours la plus belle de toutes les machines , pourroit-il aller et venir , se promener sur le globe ter-

restre, et en parcourir toutes les parties, s'il n'y avoit point de frottements ? Il tomberoit à chaque pas ; il ne pourroit tout au plus que se traîner, en s'accrochant à tout ce qu'il pourroit rencontrer. Les frottements étant donc pour nous d'une utilité infinie, nous aurions tort de nous en plaindre ; et s'ils nous sont nuisibles dans la construction de quelques machines, il faut alors chercher les moyens de les anéantir, ou du moins d'en affoiblir l'effet, ce qui est toujours possible.

L V I.

Tout le monde sait que l'on vient à bout de diminuer beaucoup les frottements par des corps gras, que l'on insere entre les surfaces frottantes. Mais outre ce moyen, il en est un autre très-efficace, qui consiste à allonger le levier de la puissance, et on l'emploie avec beaucoup d'avantages dans toutes les machines qui se meuvent en tournant sur des axes. Une voiture roule beaucoup plus facilement avec des grandes roues qu'avec des petites. Plus les bras d'une balance sont allongés, plus la pesée est juste. Un jardinier tire beaucoup plus facilement de l'eau d'un puits, lorsque la poulie dont il se sert, a 14 ou 15 pouces de diametre, que lorsqu'elle n'en a que 8 ou 9. L'avantage de la grande poulie sur la petite, vient de ce que la résistance occasionnée par la roideur de la corde et par

les frottements de l'axe , est beaucoup plus petite dans la première que dans la seconde. Mais dans quel rapport la diminution des frottements a-t-elle lieu ? Les mécaniciens ont soumis cette question au calcul , et il en résulte des formules , d'après lesquelles les frottements de l'axe d'une poulie doivent diminuer en raison inverse de son diamètre , c'est-à-dire , que l'axe restant le même , et le diamètre de la poulie devenant double , triple , quadruple , etc. , les frottements deviennent une fois plus petits , trois fois plus petits , quatre fois plus petits , etc. Quelques mécaniciens ont fait des expériences , d'après lesquelles ils prétendent établir les mêmes principes. Mais ils se sont également trompés , et dans leurs calculs , et dans leurs expériences.

L V I I.

L'erreur des mécaniciens sur cette matière , vient de ce qu'ils ont confondu le frottement *naissant* avec le frottement *absolu*. J'appelle frottement *naissant* celui qui a lieu dans le premier instant du mouvement , et frottement *absolu* , la somme de résistance , que l'on éprouve de la part des frottements pendant une révolution entière de l'axe sur lui-même , ou pendant un nombre déterminé de révolutions. Par exemple , lorsqu'un jardinier tire de l'eau d'un puits avec une poulie ,

il faut qu'il emploie d'abord une force égale au poids qu'il veut enlever ; puis à ce premier effort, il faut qu'il en joigne un second pour vaincre les frottements. Or cette première résistance qu'il éprouve de la part des frottements , est ce que j'appelle le frottement initial , ou *naissant* ; et la résistance totale qu'ils lui opposent pendant tout le temps qu'il met à élever son sceau , est le frottement *absolu*.

LVIII.

On voit sans peine que c'est ce dernier frottement qu'il nous importe sur-tout de bien connoître. Les mécaniciens ont cru qu'il est toujours proportionnel au frottement *naissant* , mais ils se sont trompés. Dans une poulie double , le frottement naissant n'est que la moitié de ce qu'il étoit dans une poulie simple , mais le frottement *absolu* devient quatre fois plus petit ; dans une poulie triple , le frottement *naissant* n'est plus que le tiers , mais le frottement *absolu* devient neuf fois plus petit ; et si le diamètre de la poulie augmente encore successivement , en sorte qu'il devienne quatre fois plus grand , cinq fois plus grand , etc. , le frottement *absolu* deviendra seize fois plus petit , vingt-cinq fois plus petit , etc. , tandis que le frottement *naissant* ne devient que quatre fois plus petit , cinq fois plus

petit , etc. En général *le frottement naissant est toujours en raison inverse du diamètre de la poulie , tandis que le frottement absolu est en raison inverse du quarré de ce diamètre.*

L I X.

Si , au lieu d'augmenter le diamètre de la poulie , on diminue les tourillons de l'arbre sur lequel elle tourne , en sorte que le diamètre de ces tourillons étant d'abord 1 , devienne successivement $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, etc. , le frottement *naissant* deviendra une fois plus petit , trois fois plus petit , quatre fois plus petit , etc. , tandis que le frottement *absolu* deviendra quatre fois plus petit , neuf fois plus petit , seize fois plus petit , etc. En général *le frottement naissant est toujours en raison directe du diamètre des tourillons de l'arbre qui soutient la poulie , et le frottement absolu est en raison directe du quarré de ce même diamètre.*

L X.

Tels sont les principes que nous avons établis dans un mémoire présenté à l'Académie des Sciences , il y a plus de douze ans. Mais ce mémoire ne plut point aux commissaires nommés pour en faire le rapport , ou plutôt ils n'en se donnerent pas la peine de l'examiner. L'un d'eux , le citoyen Leroy , déjà prévenu contre l'auteur , se contenta de garder long-tems

46 NOUVEAUX PRINCIPES

ce mémoire sans le lire , et ayant enfin pris sur lui , un matin , de le feuilleter pendant l'instant très-court que son perruquier l'accommodoit (a) , il le renvoya de suite à son confrere. Celui-ci ne trouvant point que les nouveaux principes établis dans le mémoire fussent conformes à ceux qu'il avoit lui-même consigné dans un recueil d'expériences , qui lui avoit vallu son entrée à l'Académie , en conclut que ces principes étoient faux. Il avoua d'ailleurs à l'auteur qu'il ne le comprenoit pas , et pressé par lui de donner son jugement d'une manière quelconque , favorable ou défavorable , il le donna défavorable.

L X I.

Mais si les nouveaux principes établis dans ce mémoire , ont contre eux un rapport infirme de deux membres de la ci-devant Académie des Sciences , fait à la hâte et , j'ose le dire , sans connoissance de cause , ils ont en leur faveur la certitude du raisonnement

(a) On conviendra sans doute que c'étoit prendre bien peu de temps pour examiner un mémoire mathématique , qui feroit à peu près 80 pages d'impression , avec une planche contenant 16 figures. Cependant le fait est très-certain , je le tiens du citoyen Leroy lui-même , qui en me le racontant sur le Pont-Neuf , où je l'avois rencontré , ajouta qu'il n'avoit pas besoin de lire mes démonstrations , qu'il connoissoit parfaitement bien toutes ces choses , et que son oncle avoit fait tous ces calculs bien long-temps avant moi.

mathématique, l'évidence d'une expérience en grand, que l'auteur fit à ses frais dans une des salles de l'Observatoire, en présence d'une assemblée très-nombreuse de personnes parfaitement instruites sur cette matière; enfin ils ont pour eux le témoignage de tous les savans, à qui l'auteur les a communiqués. De ce nombre sont trois membres des plus distingués de la ci-devant Académie, qui intimement persuadés de la vérité de ces principes, invitoient fortement l'auteur à faire imprimer son mémoire.

Il voulut en effet suivre cet avis, mais l'imprimeur à qui il s'adressa, lui ayant dit qu'il leur étoit défendu de ne rien imprimer contre les jugemens de l'Académie, il reprit son mémoire et le mit dans son secrétaire, où il est resté jusqu'à ce jour. Nous l'en tirerons pour le faire imprimer à la suite de l'ouvrage que nous donnerons au public, et nous en développerons les principes dans notre Cours. En attendant, nous jugeons convenable d'en donner ici une courte analyse.

L X I I.

Analyse d'un Mémoire dans lequel on établit des principes absolument neufs sur les frottemens comparés.

Il ne s'agit dans ce mémoire, que des frottemens qui ont lieu dans les machines qui se

meuvent en lignes circulaires, dans la poulie, le cylindre, le treuil, etc. On ne cherche point à fixer la quantité de frottement que ces machines éprouvent ; mais quelqu'il soit, on indique un moyen facile de le diminuer et de le rendre presque aussi petit qu'on le voudra. Ce moyen consiste en général à allonger le levier de la puissance qui fait tourner ces machines, et à diminuer le levier de la résistance qui provient des frottements, c'est-à-dire, le diamètre des tourillons. Étant donné, par exemple, une poulie d'un pied de diamètre, montée sur un arbre dont les tourillons ont un pouce de diamètre, l'auteur prouve que, quels que soient les frottements de cette poulie, si on augmente son diamètre, en sorte qu'il devienne successivement 2 pieds, 3 pieds, 4 pieds, etc., la somme des frottements deviendra successivement 4 fois plus petite, 9 fois plus petite, 16 fois plus petite, etc. ; et que le même effet aura lieu si, sans toucher au diamètre de la poulie, on diminue dans le même rapport celui des tourillons. Voici comme il prouve la vérité de ce principe.

L X I I I.

Fig. 10.

Soit AD le rayon d'une poulie montée sur un arbre, dont un des tourillons A tourne dans le collet $BEFs$. Dans l'état d'équilibre, le poids du tourillon A avec sa charge porte à l'extrémité d du rayon vertical Ad . S'il n'y avoit

avoit point de frottement, un poids infiniment petit placé en D , suffiroit pour faire tourner le tourillon, mais à cause des frottements il faut un poids assez considérable. En vertu de ce poids, le tourillon s'incline jusqu'à ce qu'il arrive en un point s du collet, sur lequel il glisse continuellement. Mais un instant avant que le tourillon glisse, il est nécessaire qu'il y ait équilibre entre le poids placé en D , et la charge totale du tourillon, que l'on peut considérer comme rassemblé au centre A . Appellant donc C cette charge, x le poids placé en D , nécessaire pour vaincre les frottements, et menant la verticale Os , nous devons avoir...

$C \times AO = x \times OD$, ou, à cause que...

$AO = ds$, $C \times ds = x \times (AD - ds)$

$AD - ds$. Représentant le rayon AD de la

poulie par b et ds par s , l'équation précédente

devient $C \times s = x \times (b - s)$, ce qui donne

$$x = \frac{s \cdot C}{b - s}$$

L X I V.

De cette expression, comme de toutes celles que l'on a données jusques à présent, il résulte que C et s étant des quantités constantes, c'est-à-dire, la charge et les tourillons d'une poulie restant les mêmes, si on fait varier son diamètre, ensorte qu'il devienne successivement b , $2b$, $3b$, $4b$, etc, l'expression du

G

frottement instantané sera , pour ces différents cas , $\frac{1 \cdot c}{b-1}$, $\frac{1 \cdot c}{2b-1}$, $\frac{1 \cdot c}{3b-1}$, etc. , et l'effort nécessaire pour vaincre les frottements pendant que la poulie tourne d'une petite quantité , sera successivement x , $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{3}$, $\frac{x}{4}$, etc. (et même un peu moins , mais on néglige cette petite différence).

L X V.

Jusqu'ici l'auteur ne dit rien de nouveau , rien qui ne puisse se conclure des principes établis dans différents ouvrages ; mais il va plus loin , il prétend que les mécaniciens ont eu tort de s'arrêter là , et de nous donner , pour les expressions générales du frottement , des formules qui n'en indiquent que les parties élémentaires , croyant sans doute qu'ici les tous sont comme leurs parties correspondantes ; idée absolument fausse , comme on va le voir par la suite des raisonnements de l'auteur.

L X V I.

L'expression $x = \frac{1 \cdot c}{b-1}$ n'indiquant que le frottement initial , ou plutôt celui qui a lieu pendant que la poulie tourne d'une petite quantité , comme , par exemple , d'un degré , celui qui aura lieu pendant qu'elle fera une révolution entière sur elle-même , sera 360

fois plus grand , et si on appelle c la circonférence des tourillons , le frottement d'un tour entier sera $\frac{c \cdot x \cdot c}{b - 1}$. Car s'il faut un effort comme x pour que des tourillons , dont la circonférence est c , tournent d'un degré , il faudra un effort 360 fois plus grand , c'est-à-dire , comme cx , pour leur faire parcourir une révolution entière.

LXVII.

En supposant que pour élever un fardeau à une hauteur déterminée avec une poulie , dont le diamètre est b , il faille faire un nombre n de tours , quelle sera alors la totalité des efforts nécessaires pour vaincre les frottements ? il est clair qu'il faudra répéter l'effort cx d'une révolution , autant de fois qu'il y aura d'unités dans le nombre n , c'est-à-dire , que la somme totale des efforts sera.....
 $ncx = \frac{nc \cdot x \cdot c}{b - 1}$. Voilà , selon l'auteur , l'expression qui doit servir de règle pour comparer les frottements des poulies de différentes grandeurs.

LXVIII.

Supposons maintenant que pour élever un même fardeau à une même hauteur , on monte successivement sur un même arbre

des poulies de différentes grandeurs, il est clair qu'alors la charge C et le sinus s sont des quantités constantes, et que le rayon de la poulie étant successivement $b, 2b, 3b, 4b$, etc., le nombre des tours sera successivement $n, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \frac{n}{4}$, etc., puisque la poulie fera d'autant moins de tours, que son diamètre sera plus grand. D'où il suit que, 1°. si on appelle x le frottement qui a lieu pendant que les tourillons tournent d'une petite quantité, on aura successivement, eu égard à la variation du diamètre de la poulie, $x = \frac{s \cdot C}{b-s}, x = \frac{s \cdot C}{2b-s},$
 $x = \frac{s \cdot C}{3b-s}, x = \frac{s \cdot C}{4b-s}$, etc.

2°. Si on appelle encore x le frottement qui a lieu pendant que l'arbre fait une révolution sur lui-même, on aura successivement. . .
 $x = \frac{c \cdot s \cdot C}{b-s}, x = \frac{c \cdot s \cdot C}{2b-s}, x = \frac{c \cdot s \cdot C}{3b-s}, x = \frac{c \cdot s \cdot C}{4b-s},$
 etc.

3°. Enfin si nous représentons par cette même lettre x , le frottement total ou absolu, c'est-à-dire, la somme des obstacles qu'opposent les frottements, pendant que le fardeau monte à la même hauteur, nous aurons successivement $x = \frac{nc \cdot s \cdot C}{b-s}, x = \frac{nc \cdot s \cdot C}{4b-2s}, x = \frac{nc \cdot s \cdot C}{9b-5s}$
 $x = \frac{nc \cdot s \cdot C}{16b-4s}$, etc.

L X I X.

L'inspection de ces dernières formules montre que la somme des frottements diminue en raison inverse des quarrés des diamètres de la poulie, ensorte que si le diamètre devient double, les frottements opposeront en somme 4 fois moins de résistance, 9 fois moins s'il devient triple, 16 fois moins s'il devient quadruple, etc.

L X X.

Si, sans changer le diamètre de la poulie, on fait varier celui des tourillons, ensorte qu'il devienne successivement $r, \frac{r}{2}, \frac{r}{3}, \frac{r}{4},$ etc., alors les quantités C, b, n étant constantes, la circonférence des tourillons sera successivement $c, \frac{c}{2}, \frac{c}{3}, \frac{c}{4},$ etc., et le sinus de l'angle dAs deviendra $s, \frac{s}{2}, \frac{s}{3}, \frac{s}{4},$ etc. Ainsi, 1°. le frottement initial ou partiel, sera représenté successivement par ces expressions,

$$x = \frac{s \cdot c}{b - s}, x = \frac{\frac{s}{2} \cdot c}{b - \frac{s}{2}}, x = \frac{\frac{s}{3} \cdot c}{b - \frac{s}{3}}, \text{ etc., qui se réduisent à celles-ci } x = \frac{s \cdot c}{b - s}, x = \frac{s \cdot c}{2b - s}, x = \frac{s \cdot c}{3b - s}, \text{ etc.}$$

2°. Le frottement qui a lieu pendant une

54 NOUVEAUX PRINCIPES

révolution de l'arbre , sera successivement

$$x = \frac{c \cdot s \cdot c}{b-s}, x = \frac{\frac{c \cdot s \cdot c}{2}}{b - \frac{s}{2}}, x = \frac{\frac{c \cdot s \cdot c}{3}}{b - \frac{s}{3}}, \text{ etc. , ou } \\ x = \frac{c \cdot s \cdot c}{b-s}, x = \frac{c \cdot s \cdot c}{4b-2s}, x = \frac{c \cdot s \cdot c}{9b-3s}, \text{ etc.}$$

3°. La somme totale des frottements qui auront lieu pendant qu'on élèvera un fardeau à une même hauteur, sera successivement re-

$$\text{présentée par } x = \frac{nc \cdot s \cdot c}{b-s}, x = \frac{n \cdot \frac{c \cdot s \cdot c}{2}}{b - \frac{s}{2}}, \\ x = \frac{n \cdot \frac{c \cdot s \cdot c}{3}}{b - \frac{s}{3}}, \text{ etc. , ou } x = \frac{ncsC}{b-s}, x = \frac{ncsC}{4b-2s}, \\ x = \frac{ncsC}{9b-3s}, x = \frac{ncsC}{16b-4s}, \text{ etc.}$$

L X X I.

On voit par-là qu'on obtient le même avantage en diminuant le diamètre des tourillons, qu'en augmentant celui de la poulie. *La somme des frottements est toujours en raison inverse du quarré du diamètre de la poulie, et en raison directe du quarré du diamètre des tourillons.*

On voit aussi que ce principe important sur une partie des plus intéressantes de la mécanique, se démontre aussi rigoureusement que les vérités les plus élémentaires de géométrie, ensorte qu'il doit passer pour

vrai, indépendamment de toute expérience. Aussi l'auteur prouve-t-il qu'on ne peut lui en objecter aucune, et que toute expérience bien faite, loin de lui être contraire, confirme pleinement la vérité de son principe.

En faisant imprimer à la suite de notre ouvrage sur la mécanique, le mémoire dont on vient de lire l'analyse, nous ajouterons quelques nouvelles preuves, et nous indiquerons la manière de faire des expériences exactes et vraiment décisives sur cet objet. L'auteur fera lui-même ces expériences dans le cours qu'il se propose de donner.

SECONDE PARTIE.

Contenant quelques articles extraits littéralement de l'ouvrage que l'on se propose de donner au public , et dont l'auteur développera les principes dans le Cours qu'il doit bientôt commencer.

LXXXVIII.

ARTICLE SECOND

Maniere d'exprimer la vitesse dans le mouvement uniformément accéléré.

Nous avons prouvé (XXXVIII) qu'en désignant par e l'espace qu'un corps parcourt pendant le premier instant de sa chute , et par H la hauteur d'où il tombe pendant un nombre t d'instant, on a toujours $H = et^2$, ce qui montre que l'espace parcouru pendant un nombre t d'instant, se trouve toujours en multipliant le carré t^2 de ce nombre par l'espace e parcouru pendant le premier instant. Or cette règle n'est pas particulière à

(a) Ce numéro renvoie à l'ouvrage d'où cet article est tiré.
la

la gravité, ou au mouvement des corps qui tombent librement, elle s'applique en général à toute espece de mouvement uniformément accéléré. Ainsi quelle que soit la force accélératrice qui agit sur un mobile, l'espace qu'il a parcouru au bout d'un nombre t d'instants, est toujours égal au quarré t^2 de ce nombre, multiplié par l'espace parcouru pendant le premier instant. Donc si nous désignons en général cet espace par $\frac{p}{2}$, et par e l'espace parcouru pendant le nombre t d'instants, nous avons $e = \frac{p t^2}{2}$.

LXXXVIII.

On voit aussi par ce que nous avons dit (XL), qu'en représentant par p la vitesse acquise au bout du premier instant, $2p$ est la vitesse acquise au bout du second instant; $3p$ la vitesse acquise au bout du troisieme, etc.; enfin pt la vitesse acquise au bout du nombre t d'instants. Représentant donc par u cette derniere vitesse, nous avons $u = pt$.

Observons maintenant qu'en différentiant les deux membres de l'équation $e = \frac{p t^2}{2}$ trouvée ci-dessus, nous avons $de = p t dt$, à cause que la force accélératrice est constante, et que cette force est représentée ici par p , c'est-à-dire, par le degré de vitesse qu'elle commu-

nique au mobile à chaque instant. Or puisque $u = pt$, nous avons nécessairement $de = udt$, et par conséquent $u = \frac{de}{dt}$. Ainsi dans le mouvement uniformément accéléré, la vitesse acquise par un corps au bout d'un temps quelconque t , est égale à l'espace infiniment petit de , qu'il peut parcourir pendant un instant infiniment petit dt , divisé par cet instant. Mais c'est-là une propriété particulière aux forces accélératrices constantes, et qui ne convient nullement aux forces accélératrices variables, comme nous le montrerons plus bas.

LXXXIX.

Puisque dans le mouvement uniformément accéléré, la vitesse u , qu'un corps a acquise au bout d'un temps quelconque t , est telle que l'on a toujours $u = pt$; si nous voulons avoir l'élément du de la vitesse, ou le degré de vitesse que le corps peut acquérir pendant un instant infiniment petit dt , nous l'aurons en différentiant l'équation $u = pt$. Prenant donc la différentielle de cette équation, et regardant p comme constante, nous avons $du = p dt$, ce qui donne $p = \frac{du}{dt}$, et fait voir que la force accélératrice p est égale à l'élément du de la vitesse, divisé par l'élément du temps. Mais c'est encore là une propriété particulière aux forces accélératrices constantes,

qui ne peut s'appliquer aux forces accélératrices variables , comme on le verra bientôt.

X C.

Si dans l'équation $u = pt$, nous faisons $t = 1$, elle devient $p = u$, ce qui montre , comme nous l'avons supposé en effet , que p est toujours égal à la vitesse que la force accélératrice communique au corps dans le premier instant. Si la force accélératrice est constante , le degré de vitesse qu'elle communiquera au corps à chaque instant , sera toujours le même ; si elle est variable , c'est-à-dire , si elle devient successivement plus grande ou plus petite , le degré de vitesse qu'elle communiquera sera aussi plus grand ou plus petit. Mais quelle que soit cette force , la quantité p en indiquera toujours l'effet , et par conséquent elle indiquera la force elle-même ; car les forces accélératrices étant proportionnelles à leurs effets , ce qui exprime l'effet en général , exprime aussi la force. Ainsi lorsque , à l'exemple de tous les mécaniciens , nous indiquerons par p ou par tout autre signe , une force accélératrice quelconque , nous entendrons par-là l'effet de cette force , c'est-à-dire , le degré de vitesse qu'elle communique à chaque instant au corps sur lequel elle agit.

X C I.

ARTICLE TROISIÈME.

De la vitesse des corps dans les mouvements variés , c'est-à-dire , ceux où la force accélératrice est variable. Erreurs des mécaniciens sur cette matière.

Depuis l'invention du calcul différentiel et intégral, les mécaniciens se sont cru en état de pouvoir résoudre les problèmes les plus difficiles de la mécanique, et de déterminer les mouvements des corps, lors même que ces mouvements sont les plus irréguliers. Pour y parvenir, ils établissent d'abord quelques équations fondamentales, qui servent de base à tous leurs calculs, et ce sont ces équations que nous allons examiner. Je vais commencer par donner une idée de leur doctrine à cet égard, et pour cet effet, je crois ne pouvoir mieux faire que de copier littéralement un des auteurs élémentaires le plus estimé, je veux dire Bezout. Voici comme il s'exprime dans la quatrième partie de son Cours, n° 210, p. 258.

« 1°. De quelque manière que le mouvement soit varié, si on le considère par rapport à des instants infiniment petits, on peut supposer que la vitesse ne change

» point pendant la durée de cet instant. Or
 » lorsque la vitesse est uniforme, elle a pour
 » expression l'espace décrit pendant un temps
 » quelconque t , divisé par ce même temps t .
 » Donc lorsqu'elle ne sera uniforme que pen-
 » dant un instant, elle doit avoir pour ex-
 » pression, l'espace infiniment petit décrit
 » pendant cet instant, divisé par cet instant.
 » Donc si e représente l'espace décrit d'un
 » mouvement variable, pendant le temps
 » quelconque t , de représentera ce qui est
 » décrit uniformément pendant l'instant dt ;
 » on aura donc $u = \frac{de}{dt}$, ou $de = udt$; pre-
 » mière équation fondamentale des mouve-
 » ments variés.

» 211. 2°. L'équation $u = pt$, trouvée (197),
 » et qui exprime le rapport des vitesses aux
 » temps, dans les mouvements uniformément
 » accélérés, donne $p = \frac{u}{t}$, c'est-à-dire, que
 » quand la force accélératrice, ou plutôt la
 » quantité p par laquelle on la mesure (201)
 » est constante, elle a pour expression la vi-
 » tesse u , qu'elle engendre pendant un cer-
 » tain temps t , divisée par ce temps t . Donc
 » si cette force accélératrice p agit différem-
 » ment d'un instant à l'autre; c'est-à-dire, si
 » elle n'est constante que pendant un instant,
 » elle doit avoir pour expression la vitesse
 » qu'elle engendre pendant cet instant, di-
 » visée par cet instant; c'est-à-dire, qu'elle

» doit avoir pour expression l'accroissement
 » de la vitesse; divisé par l'accroissement du
 » temps; on aura donc $p = \frac{du}{dt}$, ou $du = p dt$;
 » *seconde équation fondamentale des mou-*
 » *vemens variés.* »

X C I I.

Observations.

On voit par ce que nous avons dit ci-dessus (87 et 88), que ces deux équations $u = \frac{de}{dt}$, et $p = \frac{du}{dt}$ sont vraies, lorsque le mouvement est uniformément accéléré, ou, ce qui est la même chose, lorsque la force accélératrice p est constante, et c'est-là sans doute ce qui a induit les mécaniciens en erreur. L'équation $\frac{v^2}{2} = e$, qui a lieu dans le mouvement uniformément accéléré, étant différenciée à l'ordinaire, et en regardant p comme constante, donne finalement $pt = \frac{de}{dt}$, et comme dans ce mouvement on a $u = pt$, on a donc aussi $u = \frac{de}{dt}$. De même en différenciant l'équation $u = pt$, on a $du = p dt$, et par conséquent $p = \frac{du}{dt}$, comme nous l'avons dit. Ainsi le simple calcul conduit aux deux équations que les mécaniciens regardent comme les *équations fondamentales des mouvemens variés.*

Mais il faut bien prendre garde que le calcul ne donne ces deux équations que parce que la force accélératrice p est supposée constante ; car en la supposant variable , les résultats sont bien différens , et c'est à quoi sans doute les mécaniciens n'ont pas pensé.

X C I I I.

Ainsi dans le mouvement uniformément accéléré , il est vrai de dire, 1°. que la vitesse u est égale à l'espace infiniment petit, décrit pendant un instant infiniment petit, divisé par cet instant, et cela dérive de l'équation $u = \frac{ds}{dt}$; 2°. que la force accélératrice constante p est égale à l'accroissement du de la vitesse, divisé par l'accroissement dt du temps, et cela résulte de l'équation $p = \frac{du}{dt}$. On peut donc admettre comme vrais tous les raisonnemens de Bezout , pourvu qu'on ne les applique qu'aux forces accélératrices constantes. Mais ce n'est point par ces raisonnemens que je suis convaincu de la vérité des deux équations $u = \frac{ds}{dt}$, $p = \frac{du}{dt}$; je ne les admet que parce que le calcul me les donne immédiatement. Or si ces mêmes raisonnemens étoient bons pour les cas où la force accélératrice p est variable , il faudroit qu'ils fussent toujours d'accords avec les calculs , et c'est ce qui n'a

pas lieu, comme on va le voir par les théorèmes suivants.

X C I V.

Théorème premier.

Si une force accélératrice p , après avoir été constante pendant tout le temps t , devient variable au bout de ce temps, l'expression de la vitesse u , acquise au bout de ce temps, n'est pas $u = \frac{d}{dt}$, mais $u = \frac{de}{dt} \mp \frac{t'dp}{2dt}$.

Démonstration.

Puisque la force accélératrice p est supposée constante pendant tout le temps t , on a, d'après les principes relatifs aux mouvements uniformément accélérés, $\frac{v^2}{2} = e$, et $u = pt$, e étant toujours l'espace parcouru depuis l'origine du mouvement, t le temps pendant lequel il a été parcouru, et u la vitesse acquise au bout de ce temps. D'un autre côté, p devenant variable au bout du temps t , comme nous le supposons, la différentielle de l'équation $\frac{v^2}{2} = e$ n'est pas $pt dt = de$, mais $pt dt \pm \frac{t'dp}{2} = de$, ce qui donne $pt = \frac{de}{dt} \mp \frac{t'dp}{2dt}$, et puisque $pt = u$, on a finalement $u = \frac{de}{dt} \mp \frac{t'dp}{2dt}$,
et

et non pas simplement $u = \frac{de}{dt}$, ce qu'il falloit d'un.

Des deux signes qui précèdent le dernier terme du second membre de notre équation, celui qui est au-dessus, est pour le cas où la force accélératrice p va en augmentant, et celui qui se trouve au-dessous, est pour le cas où elle va en diminuant.

X C V.

Quoique la formule $u = \frac{de}{dt} \mp \frac{v^2 dp}{2dt}$ soit incontestable, puisqu'elle est fondée sur un calcul absolument élémentaire, voici quelques observations qui acheveront d'en montrer l'exactitude.

1°. La quantité u indiquant la vitesse acquise au bout du temps t , par un mouvement uniformément accéléré, la valeur de u ne changera point, soit que la force accélératrice p continue d'être constante après le temps t , soit qu'elle devienne variable au bout de ce temps.

2°. Si la force accélératrice vient à augmenter au bout du temps t , l'espace parcouru pendant l'instant dt sera plus grand qu'il ne le seroit, si p continuoit à être constante après le temps t , et au contraire cet espace sera plus petit, si p devient plus petite au bout du temps t . Représentant donc par de l'espace

66 NOUVEAUX PRINCIPES

parcouru pendant l'instant dt , lorsque la force accélératrice p continue d'être constante, par de' l'espace parcouru pendant l'instant dt , lorsque p devient plus grande au bout du temps t , et par de'' l'espace parcouru pendant l'instant dt , lorsque p devient plus petite au bout du temps t , nous aurons de'' plus petit que de , et de plus petit que de' ; et par conséquent $\frac{de''}{dt} < \frac{de}{dt}$, $\frac{de}{dt} < \frac{de'}{dt}$. Mais lorsque la force accélératrice p continue d'être constante, nous avons $u = \frac{de}{dt}$; donc lorsque p devient plus grande au bout du temps t , nous ne pouvons pas avoir $u = \frac{de'}{dt}$, et lorsque p devient plus petite, nous ne pouvons pas avoir $u = \frac{de''}{dt}$; car alors nous aurions trois valeurs différentes pour la quantité u , qui n'en peut avoir qu'une, puisqu'elle est la même dans les trois cas. Mais nous avons $u = \frac{de}{dt}$, $u = \frac{de'}{dt} - \frac{t' dp}{2dt}$, $u = \frac{de''}{dt} + \frac{t' dp}{2dt}$, et ces trois équations donneront une même valeur pour u . Or si nous désignons en général par de les espaces de , de' , de'' parcourus pendant l'instant dt dans les trois cas, nous avons cette seule équation $u = \frac{de}{dt} \mp \frac{t' dp}{2dt}$, qui satisfait à tous les cas, même à celui où la force accélératrice p continue d'être constante après le temps t , puisqu'alors nous avons $dp = 0$, $\frac{t' dp}{2dt} = 0$, et par conséquent $u = \frac{de}{dt}$.

X C V I.

Corollaire.

Il suit du théorème précédent que lorsque une force accélératrice constante p vient à varier au bout d'un temps t , la vitesse u , acquise au bout de ce temps, ne peut pas être regardée comme constante pendant chacun des instants infiniment petits dt , qui suivent le temps t ; car si cela étoit, nous aurions $u = \frac{de}{dt}$, au lieu de $u = \frac{de}{dt} \mp \frac{1}{2} \frac{dp}{2dt}$. Nous trouvons donc ici une preuve évidente de la fausseté de ce principe général, admis par tous les mécaniciens, que *de quelque manière que le mouvement soit varié, si on le considère par rapport à des instants infiniment petits, on peut supposer que la vitesse ne change point pendant la durée de cet instant.*

X C V I I.

Théorème second.

Si une force accélératrice p , supposée constante pendant tout le temps t , devient variable au bout de ce temps, son expression n'est point $p = \frac{du}{dt}$, mais $p = \frac{du}{dt} \mp \frac{1}{2} \frac{dp}{dt}$.

Démonstration.

Puisque la force accélératrice p , qui agit sur un corps, est supposée constante pendant tout le temps t , il est certain par la propriété des forces accélératrices constantes, que la vitesse u , acquise par le corps au bout du temps t , sera exprimée par cette équation $u = pt$, et que l'accroissement infiniment petit du de cette vitesse après le temps $t + dt$, se trouvera en différentiant l'équation $u = pt$. Or puisque p devient variable après le temps t , cette différentielle n'est point $du = pdt$; mais $du = pdt + tdp$. En effet, si la force accélératrice p restoit constante, l'accroissement de la vitesse après le temps $t + dt$ seroit $du = pdt$; mais puisque cette force augmente après le temps t , l'accroissement du de la vitesse après le temps $t + dt$ doit aussi être plus grand que dans le premier cas; il doit être pdt , plus quelque chose, et ce quelque chose est tdp ; en un mot, il doit être $du = pdt + tdp$, comme nous venons de le trouver.

Si la force accélératrice p , au lieu d'augmenter, alloit en diminuant au bout du temps t , il est clair que cette même force, après le temps $t + dt$, deviendrait $p - dp$, et par conséquent nous aurions $du = pdt - tdp$. Donc de quelque manière que varie la quantité p , soit en plus, soit en moins, l'expression de l'élément de la vitesse est $du = pdt \pm tdp$, équation

tion qui donne $p = \frac{da}{dt} + \frac{tdp}{dt}$, ce qu'il falloit démontrer.

XCVIII.

Pour jeter un plus grand jour sur cet objet, nous allons faire ici quelques observations semblables à celles que nous avons faites sur le premier théorème.

1°. La quantité p indiquant la force accélératrice constante, qui agit sur le corps pendant tout le temps t , nous devons toujours trouver pour p une même valeur, soit que la force accélératrice continue d'être constante après le temps t , soit qu'elle devienne variable au bout de ce temps.

2°. Si la force accélératrice vient à augmenter au bout du temps t , le degré de vitesse du , qu'elle communiquera au corps pendant l'instant dt , sera plus grand qu'il ne le seroit, si cette force continuoit à être constante après le temps t ; et au contraire ce degré de vitesse sera plus petit, si la force accélératrice devient plus petite au bout du temps t . D'où il suit que si nous désignons par du le degré de vitesse communiqué au corps pendant l'instant dt , lorsque la force accélératrice continue d'être constante après le temps t , par du' le degré de vitesse communiqué pendant l'instant dt , lorsque la force accélératrice augmente après le temps t , et par du'' le degré de vi-

tesse communiqué pendant l'instant dt , lorsque la force accélératrice va en diminuant après le temps t , nous aurons du'' plus petit que du , et du plus petit que du' ; et par conséquent $\frac{du''}{ds} < \frac{du}{ds}$, $\frac{du}{ds} < \frac{du'}{ds}$. Mais nous savons que lorsque la force accélératrice continue d'être constante, on a $p = \frac{du}{ds}$; donc lorsque cette force devient plus grande au bout du temps t , nous ne pouvons pas avoir $p = \frac{du'}{ds}$, et lorsqu'elle devient plus petite, nous ne pouvons pas avoir $p = \frac{du''}{ds}$; car alors nous aurions trois valeurs différentes pour la quantité p , qui ne peut en avoir qu'une, puisqu'elle indique la force accélératrice qui a lieu au bout du temps t , et que cette force étant unique, ne peut avoir qu'une valeur individuelle. Mais nous avons.....

$p = \frac{du}{ds}$, $p = \frac{du'}{ds} - \frac{vdp}{ds}$, $p = \frac{du''}{ds} + \frac{vdp}{ds}$, et ces trois équations ne donnent qu'une même valeur pour p . Or si nous représentons en général par du les degrés de vitesse communiqués au corps pendant l'instant dt dans les trois cas, nous avons cette seule équation $p = \frac{du}{ds} + \frac{vdp}{ds}$, qui satisfait à tous les cas, même à celui où la force accélératrice continue d'être constante après le temps t ; car alors nous avons $dp = 0$, $\frac{vdp}{ds} = 0$, et par conséquent $p = \frac{du}{ds}$.

X C I X.

Il n'en faut pas d'avantage pour se convaincre de la fausseté des raisonnements, par lesquels Bezout veut établir sa seconde équation *fondamentale*. L'erreur de cet auteur vient de ce qu'il a généralisé les idées sans aucun fondement, et cette erreur lui est commune avec tous les mécaniciens. Ils ont voulu appliquer à toute espèce de force accélératrice, quelque variable qu'elle soit, ce qui ne convient qu'aux forces accélératrices constantes, et pour arriver à ce but, ils ont recours à un raisonnement métaphysique, qui paroît d'abord captieux, mais dont la fausseté se fait bientôt appercevoir quand on l'examine avec un peu d'attention. En effet on suppose que la force accélératrice p , regardée comme variable, est constante pendant un instant infiniment petit; mais cet instant étant indéterminé, je puis dire que c'est le premier, le second, le troisième, le quatrième, et ainsi de suite à l'infini; vous supposez donc que p est constante pendant chaque instant consécutif; vous la regardez donc toujours comme constante, et vous arrivez à l'équation $p = \frac{dv}{dt}$, qui convient effectivement aux forces accélératrices constantes. Mais vous n'arrivez-là que parce que vous supposez constante la même quantité que vous aviez supposée d'abord variable,

c'est-à-dire, que vous faites deux suppositions contraires, ce qui est le comble de l'absurdité en fait de raisonnement. Mais continuons d'éclaircir cette matière de plus en plus, et posons d'abord, comme des principes incontestables, les propositions suivantes.

C.

Première proposition.

Un corps étant soumis à l'action d'une force accélératrice quelconque p , sa vitesse u acquise au bout d'un nombre t d'instants, peut s'exprimer par cette équation $u = npt$, n étant un nombre inconnue, variable ou non variable.

Si la force accélératrice p est constante, il faut faire $n = 1$, et on a simplement $u = pt$, qui est en effet l'expression de la vitesse, lorsque la force accélératrice est constante.

C I.

Deuxième proposition.

L'élément du de la vitesse, ou le degré de vitesse que la force accélératrice communique au corps à chaque instant infiniment petit, doit se trouver en différentiant l'équation $u = npt$, dans laquelle p étant variable, n l'est aussi.

aussi. Nous avons donc $du = npdt + ntdp + ptdn$, et c'est-là l'expression générale de l'élément de la vitesse imprimée à un corps par une force accélératrice quelconque.

Si p est constante, n l'est aussi, et nous avons $n=1$, $dp=0$, $dn=0$; par conséquent l'équation précédente se réduit à celle-ci $du = pdt$, comme nous l'avons trouvé ci-dessus (LXXXVII). Mais il ne faut pas oublier que nous n'arrivons à ce dernier résultat, qu'en supposant p constante. Tant que la force accélératrice p sera variable, l'élément du de la vitesse, ou le degré de vitesse que cette force communique au mobile à chaque instant infiniment petit, est exprimé par cette équation $du = npdt + ntdp + ptdn$.

Remarquons que cette expression générale peut se simplifier, lorsque la force accélératrice, après avoir été constante pendant un temps quelconque t , devient variable au bout de ce temps; car alors on a $u = pt$ et $du = pdt + tdp$, comme nous l'avons montré ci-dessus (XCXIV). Mais l'équation $du = pdt + tdp$ n'est bonne que pour le premier instant où la force accélératrice devient variable; elle ne peut convenir aux instants suivans, et pour ceux-ci il faudroit prendre l'équation générale $du = npdt + ntdp + ptdn$. Il est vrai que cette équation présente trois inconnues, savoir n , dn et dp , et que nous n'aurons jamais les

74 NOUVEAUX PRINCIPES

données nécessaires pour les déterminer. Voilà pourquoi sans doute les mécaniciens ont cherché à s'en débarrasser tout d'un coup, en se persuadant par des raisonnements métaphysiques que les choses se passent dans les mouvements irréguliers comme dans les mouvements uniformément accélérés, et que dans les uns et les autres on a toujours $du = p dt$. Mais cette manière de traiter des Mathématiques est un peu trop leste, et Archimède, ni Pascal ne l'auroient point adoptée.

C I I.

Troisième proposition.

Lorsque le mouvement est uniformément accéléré, l'espace parcouru par le mobile au bout du temps t , étant représenté par e , on a $e = \frac{v^2}{2}$; donc lorsque la force accélératrice p est variable, on peut supposer $e = \frac{m p t^2}{2}$; m étant un nombre inconnu et variable.

C I I I.

Quatrième proposition.

L'élément de de l'espace parcouru, ou l'espace infiniment petit parcouru pendant l'instant dt , doit se trouver en différentiant l'équa-

tion $\frac{mpt^2}{2} = e$. Nous avons donc.....
 $de = mptdt + \frac{mt^2dp}{2} + \frac{pt^2dm}{2}$, et c'est là l'ex-
 pression générale de l'élément de l'espace par-
 couru par un corps soumis à l'action d'une
 force accélératrice quelconque.

Or il est bien vrai qu'en faisant $m = 1$, et regardant p comme constante, cette dernière équation se ramène à celle-ci $de = ptdt$, puisqu'alors les deux derniers termes se réduisent à zéro. Mais l'équation $de = ptdt$ donne $pt = \frac{de}{dt}$, et substituant cette valeur de pt dans l'équation $u = npt$ trouvée ci-dessus (XCXVII), nous avons $u = \frac{nde}{dt}$. Il faudroit donc encore supposer l'inconnue n égale à 1, pour que cette dernière équation se réduisit à celle-ci $u = \frac{de}{dt}$, que les mécaniciens donnent pour la première équation fondamentale des mouvements variés, en s'appuyant sur ce prétendu principe que, dans ces sortes de mouvements, la vitesse est égale à l'espace parcouru pendant un instant infiniment petit, divisé par cet instant. Mais ils n'ont pas pris garde que ce principe n'est vrai que pour les mouvements uniformément accélérés, puisque pour arriver à l'équation $u = \frac{de}{dt}$, il faut regarder la force accélératrice p comme constante, ainsi que les inconnues m et n , qu'il faut faire égales à l'unité.

C I V.

Cinquieme proposition.

Dans les mouvements variés , c'est-à-dire , dans ceux où la force accélératrice p est variable, la vitesse u acquise au bout du temps t , est exprimée par cette équation

$$u = \frac{n}{dt} \left(\frac{de}{m} - \frac{t^2 dp}{2} - \frac{pt^2 dm}{2m} \right), n \text{ et } m \text{ étant deux nombres inconnus et variables.}$$

En effet l'équation $de = mptdt + \frac{nt^2 dp}{2} + \frac{pt^2 dm}{2}$ donne $pt = \frac{de}{mdt} - \frac{t^2 dp}{2dt} - \frac{pt^2 dm}{2mdt}$, et substituant cette valeur de pt dans l'équation $u = npt$, on a

$$u = \frac{nde}{mdt} - \frac{nt^2 dp}{2dt} - \frac{pt^2 dm}{2mdt} = \frac{n}{dt} \left(\frac{de}{m} - \frac{t^2 dp}{2} - \frac{pt^2 dm}{2m} \right).$$

 Il est donc faux que dans les mouvements variés , la vitesse u a pour expression l'espace infiniment petit de , décrit pendant un instant infiniment petit dt , divisé par cet instant. Cela n'est vrai que dans les mouvements uniformément accélérés.

C V.

Sixieme proposition.

La variation de la force accélératrice p peut se faire de deux manieres; 1°. cette force peut augmenter ou diminuer d'une certaine

quantité à chaque instant infiniment petit ;
 2°. *elle peut augmenter ou diminuer par intervalle, ensorte qu'il se passera un certain nombre d'instants entre chaque degré d'augmentation ou de diminution.*

Lorsqu'un corps M (Fig. 1, 2, 3) roule sur la partie convexe ADB , ou sur la partie concave BEF d'une courbe, la variation de la force accélératrice est de la première espèce, c'est-à-dire, qu'elle augmente ou qu'elle diminue d'une certaine quantité à chaque instant infiniment petit.

Lorsqu'un corps M (Fig. 4, 5, 6) roule sur la partie convexe d'un polygone, composé d'un nombre indéfini de côtés AC , CD , DL , etc., ou sur la partie concave BQ , QE , Es , etc., la variation de la force accélératrice est de la seconde espèce, c'est-à-dire, qu'elle augmente ou qu'elle diminue par intervalle, ensorte qu'il se passe un certain nombre d'instants entre chaque degré d'augmentation ou de diminution. En effet, la force accélératrice restera constante pendant tout le temps que le corps parcourra chaque côté du polygone.

C V I.

Dans la variation de la première espèce, c'est-à-dire, lorsque le corps M roule sur la partie convexe ou concave d'une surface

courbe, la force accélératrice augmentant ou diminuant d'une certaine quantité à chaque instant infiniment petit, la vitesse u doit aussi augmenter ou diminuer d'une certaine quantité à chaque instant infiniment petit. On ne peut donc pas regarder cette vitesse comme constante d'un instant infiniment petit à l'autre; et par conséquent on ne peut pas la supposer égale à l'espace infiniment petit de, parcouru pendant un instant infiniment petit dt , divisée par cet instant. En effet nous avons montré ci-dessus que l'équation $u = \frac{ds}{dt}$ n'est bonne que pour les cas où la force accélératrice p est constante, et quand elle est variable, on a nécessairement $u = \frac{n}{dt} \left(\frac{ds}{m} - \frac{r^2 dp}{2} - \frac{ps^2 dm}{2m} \right)$ (par la cinquieme proposition).

C V I I.

Dans la variation de la seconde espece, c'est-à-dire, lorsqu'un corps roule sur la partie convexe $ADLB$, ou sur la partie concave $BESF$ (Fig. 4, 5, 6) d'un polygone, la force accélératrice p est constante pendant tout le temps qu'elle met à parcourir chaque côté du polygone. Or si on imagine que ce côté est partagé en plusieurs parties égales, et si on représente par u la vitesse dont le corps est animé après avoir parcouru un certain nombre de ces parties, on aura $u = pt$, et par con-

séquent $du = p dt$. Mais que signifie alors la quantité t ? N'est-il pas évident qu'elle indique le temps pendant lequel le mobile auroit acquis la même vitesse u , par un mouvement uniformément accéléré, et non le nombre des instants qui se sont écoulés depuis qu'il a commencé à rouler sur le polygone entier, c'est-à-dire, depuis l'origine du mouvement ? De même dt n'indique point la différentielle du temps qui s'est écoulé depuis l'origine du mouvement, mais la différentielle du temps pendant lequel le mobile auroit acquis la vitesse u , par un mouvement uniformément accéléré.

Il est évident que le nombre des côtés du polygone compris entre A et B , ou entre B et F , peut être aussi grand qu'on le voudra. Supposons donc qu'il soit de mille côtés, et imaginons que le corps M est arrivé au centième côté au bout du temps T . Il est certain que ce côté peut être partagé en une infinité de parties égales, et que le temps pendant lequel le corps M parcourra ce côté, peut aussi se diviser en une infinité d'instants infiniment petits dt . Il n'est pas moins évident que le mouvement du corps M , pendant tout le temps [qu'il roulera sur ce côté, sera un mouvement uniformément accéléré, et qu'on aura par conséquent $u = pt$, et $du = p dt$. Mais t indique ici le temps pendant lequel le corps auroit acquis la vitesse u , par un mouve-

ment uniformément accéléré, et non le temps T qui s'est écoulé depuis que le corps a commencé à parcourir les cent premiers côtés du polygone. De même dt est la différentielle du temps t , et non celle du temps T . On voit donc ici l'illusion des mécaniciens, qui est de confondre les deux temps T et t , et de prendre dt pour la différentielle de T , tandis qu'elle n'est que la différentielle de t . Mais donnons un peu plus de développement à cette idée, et pour cet effet, établissons encore la proposition suivante.

C V I I I.

Septieme proposition.

Toute force accélératrice constante peut se représenter par celle de la pesanteur agissant sur un corps M , qui roule sur un plan AB (Fig. 1, 2, 3), faisant avec la verticale AF un angle aigu quelconque; et toute force accélératrice variable peut se représenter par l'action de la pesanteur sur un corps M , qui roule sur la surface convexe ADB , ou sur la surface concave BEF d'une courbe ou d'un polygone (Fig. 1, 2, 3, 4, 5, 6).

La premiere partie de cette proposition est évidente; car la masse du corps M peut être aussi grande ou aussi petite qu'on le voudra, et l'angle aigu BAF (Fig. 1, 2, 3) peut aussi
se

se modifier d'une infinité de manieres entre 0 et 90° . Or quel que soit cet angle, le corps M , en roulant sur le plan AB , prendra un mouvement uniformément accéléré ; la pesanteur agissant donc sur ce corps dans tous les cas, et se trouvant diversifiée d'une infinité de manieres par les différentes inclinaisons du plan AB , et par la variation de la masse du corps M , peut représenter toute espece de force accélératrice constante.

La seconde partie de la même proposition n'est pas moins incontestable ; car la masse du corps M pouvant varier à l'infini, et la courbe ou polygone $ADBEF$ pouvant aussi se diversifier d'une infinité de manieres, comme on le voit dans les six figures, il est clair que la pesanteur faisant rouler ce corps sur ces diverses courbes ou polygones, peut représenter toute espece de force accélératrice variable. Lorsque le corps M partira du point A , la force accélératrice qui agira sur lui, ne sera qu'une très-petite portion, ou même une partie infiniment petite de la pesanteur, selon la nature de la courbe ou du polygone ADB , et quand il sera au point B , il recevra toute l'action de la pesanteur. Au contraire, lorsque le corps M roulera dans la partie concave BEF de la courbe ou du polygone, il recevra toute l'action de la pesanteur en partant du point B , et quand il sera en F , il ne sera plus poussé que par une petite partie, ou même

L

par une partie infiniment petite de la pesanteur, selon la nature de la courbe ou du polygone BEF . Ainsi en faisant rouler le corps M sur la partie convexe ADB de ces courbes ou polygones, la pesanteur représentera toutes les forces accélératrices qui vont en augmentant, et en le faisant rouler sur la partie concave BEF , elle représentera toutes les forces accélératrices qui vont en diminuant.

Nous sommes en état présentement de montrer, pour ainsi dire, au doigt, l'illusion des mécaniciens, et c'est ce que l'on va voir par les observations suivantes.

C I X.

1°. Considérons d'abord le cas où la force accélératrice p augmente par intervalle, en sorte qu'il se passe un temps quelconque fini entre chaque degré d'augmentation; p est par conséquent constante pendant tout le temps qui s'écoule d'un intervalle à l'autre, et peut se représenter par la pesanteur agissant sur le corps M , et le faisant rouler sur la surface convexe du polygone $ACDLB$ (Fig. 4, 5, 6). Appellons u la vitesse que ce corps aura acquisé quand il sera au point D , et T le temps qu'il aura employé pour y arriver. Prolongeons le côté LD jusqu'en H , c'est-à-dire, jusqu'à la rencontre de la ligne horizontale AH , et supposons que le corps

M placé en H , roule jusqu'en D sur le plan HD . Il est certain (LXXI) que les hauteurs perpendiculaires des points A et H , au-dessus du point D , étant égales, le corps M arrivera à ce point avec la même vitesse u , soit qu'il roule sur la surface AD , soit qu'il descende le long du plan HD . Mais le temps ne sera pas le même, c'est-à-dire que le corps M descendra beaucoup plus promptement par le plan HD , que par la surface ACD . Appelant donc t le temps de la descente par HD , nous avons $t < T$.

Supposons maintenant que le corps M continue à se mouvoir sur le côté DL pendant un instant infiniment petit dt , et cherchons l'élément du de la vitesse, ou le degré de vitesse acquise au bout de cet instant. Or p étant la force accélératrice qui agit sur le corps M au point D , et cette force étant invariable pendant tout le temps que le corps roulera sur le côté DL , nous avons nécessairement $du = p dt$. Mais il est visible que dt est la différentielle de t , et non celle de T ; c'est-à-dire, que dt est la différentielle du temps pendant lequel le corps M a parcouru le plan incliné HD par un mouvement uniformément accéléré, et non celle du temps pendant lequel il a parcouru la surface ACD , par un mouvement varié. Cependant les mécaniciens, sans s'en appercevoir, font réellement $t = T$, ils regardent dt comme l'élé-

84 NOUVEAUX PRINCIPES

ment de T , c'est-à-dire, comme l'élément du temps pendant lequel un corps poussé par une force accélératrice variable, acquiert la vitesse u , tandis que dt est la différentielle du temps pendant lequel ce même corps acquerreroit la vitesse u , par un mouvement uniformément accéléré.

C X.

2°. Si la force accélératrice p , au lieu d'augmenter par intervalle, va en diminuant, de manière que chaque degré de diminution soit séparé de celui qui le précède par un temps fini quelconque ; par exemple, si, en représentant par c la centième partie d'une seconde, p devenoit $\frac{99p}{100}$ au bout du temps c , $\frac{98p}{100}$ au bout du temps $2c$, $\frac{97p}{100}$ au bout du temps $3c$, etc., alors cette force seroit représentée par l'action de la pesanteur agissant sur le corps M , et le faisant rouler le long de la surface concave du polygone $BQESF$ (Fig. 4, 5, 6). Car il est évident que l'action de la pesanteur sur ce corps, devient successivement plus petite, à mesure qu'il parcourt les divers côtés du polygone. Prolongeons maintenant le côté SE jusqu'à la rencontre de la ligne horizontale BR , et imaginons que le corps M placé en R , roule librement le long du plan RE . Les deux points B et R se trouvant

placés sur une même ligne horizontale, et étant par conséquent à une même hauteur verticale, par rapport au point E , la vitesse dont le corps M se trouvera animé au point E , sera la même, soit qu'il descende le long du polygone BQE , soit qu'il roule sur le plan RE . Mais il descendra plus promptement par le polygone BQE que par le plan RE . Soit u la vitesse du corps M au point E , T le temps de la descente par le polygone BQE , et t le temps de la descente par RE , nous avons nécessairement $t > T$.

Imaginons présentement que le corps M continue à se mouvoir sur le côté ES pendant un instant infiniment petit dt , et cherchons l'élément du de la vitesse, ou l'accroissement de la vitesse au bout de cet instant. La force accélératrice qui agit sur le corps M au point E , étant représentée par p , et cette force étant constante pendant tout le temps que le corps M roulera sur le côté ES , nous aurons nécessairement $du = p dt$. Mais dt est l'élément du temps t , et non celui du temps T ; c'est la différentielle du temps pendant lequel le corps M a parcouru le plan RE , par un mouvement uniformément accéléré, et non celle du temps pendant lequel il a parcouru le polygone BQE , par un mouvement varié. On voit donc ici, comme dans le cas précédent, l'illusion des mécaniciens; ils veulent que dt soit l'élément

du temps pendant lequel un corps a acquis la vitesse u par un mouvement varié, tandis que c'est l'élément du temps pendant lequel ce corps acquerreroit la même vitesse u par un mouvement uniformément accéléré.

C X I.

3°. Tout ce que nous venons de dire est vrai, quel que soit le nombre des côtés du polygone $ADLB$ et $BESF$. Nous pouvons donc supposer que ces polygones ont un nombre infini de côtés, et dans ce cas, ils seront représentés par les courbes $ADLB$ et $BESF$ (Fig. 1, 2, 3). Les lignes HD et RE , menées des points D et E jusqu'à la rencontre des lignes horizontales AH et BR , seront tangentes à ces courbes, et DL et ES en seront des portions infiniment petites. Si nous supposons donc, comme ci-dessus, que le corps M partant du point A , lorsque la force accélératrice va en augmentant, ou du point B , lorsqu'elle va en diminuant, arrive au point D ou E avec la vitesse u ; et si nous appelons p la force accélératrice qui agit sur ce corps au point D ou E , cette force pouvant être regardée comme constante pendant l'instant infiniment petit dt , que le corps M mettra à parcourir l'espace infiniment petit DL ou ES , nous aurons $du = p dt$. Mais dt n'est point l'élément du temps pendant lequel le corps M a roulé sur

la surface convexe AD de la courbe ADB , ou sur la surface concave BE de la courbe BEF . Il est visible au contraire que dt est l'élément du temps pendant lequel le corps M seroit descendu en roulant sur le plan HD ou sur le plan RE , par un mouvement uniformément accéléré. Ainsi quelle que soit la variation d'une force accélératrice, qu'elle aille en augmentant ou en diminuant par des intervalles de temps finis ou infiniment petits, si on exprime l'élément du de la vitesse par cette equation $du = p dt$, la quantité dt n'est point la différentielle du temps pendant lequel un corps aura acquis la vitesse u par un mouvement varié ; mais elle est la différentielle du temps pendant lequel ce même corps acquerreroit la vitesse u par un mouvement uniformément accéléré. On voit donc clairement l'illusion des mécaniciens, ils confondent deux temps très-distincts, et ils prennent pour l'élément du premier, ce qui n'est que l'élément du second.

C X I I.

4°. Le corps M roulant sur la partie convexe du poligone $ACDLB$ (Fig. 4, 5, 6), et pouvant représenter toute espece de corps poussé par une force accélératrice qui va en augmentant, pour avoir l'élément du de sa vitesse au bout d'un temps quelconque, il ne

faut pas le considérer dans les instants infiniment petits, pendant lesquels il parcourt un même côté, mais dans l'instant infiniment petit, où il passe d'un côté à l'autre, par exemple, du côté DL au côté LG . En effet, puisqu'on suppose que son mouvement est varié, pour avoir l'élément de sa vitesse, il faut bien le considérer dans son état de variabilité, et non dans les instants où son mouvement peut être regardé comme uniformément accéléré. Supposons donc que le corps M partant du point A , roule jusqu'en L ; appelons p la force accélératrice, ou l'action de la pesanteur qui agit sur lui au point L , et nommons u la vitesse dont il est animé en ce point. Mais la ligne AH étant horizontale, nous pouvons supposer que le corps M a acquis la même vitesse en roulant sur le plan HDL , et dans ce cas, la force accélératrice p aura agit sur lui comme force constante pendant tout le temps de son mouvement. Imaginons maintenant que le corps M quittant le côté DL , commence à rouler sur le côté LG pendant un instant infiniment petit dt ; la force accélératrice p sera plus grande qu'elle ne l'étoit avant cet instant; elle deviendra $p + \frac{p}{m}$, m étant un nombre quelconque, qui peut être supposé aussi grand qu'on le voudra, pourvu qu'on ne le fasse pas infini; car alors on aurait $\frac{p}{m} = 0$, et par conséquent

p

$p + \frac{p}{m} = p$, c'est-à-dire, que dans ce cas la force accélératrice p seroit constante, ce qui est contre l'hypothèse. Le corps M étant donc poussé, pendant l'instant dt , par la force accélératrice $p + \frac{p}{m}$, le degré de vitesse que cette force lui communiquera pendant cet instant, sera $(p + \frac{p}{m}) dt$, et ainsi appellant du ce degré de vitesse, nous avons $du = p dt + \frac{p dt}{m}$. Ainsi pour avoir l'élément de la vitesse, il faudroit, dans l'équation $du = p dt + \frac{p dt}{m}$, déterminer l'inconnue m , et nous n'avons pour cela aucune donnée, sur-tout lorsque la variation de la force accélératrice est irrégulière, comme dans le cas où elle augmenteroit de $\frac{1}{1000}$ au bout de $\frac{1}{100}$ de seconde, de $\frac{3}{1000}$ au bout de $\frac{2}{100}$ de seconde, de $\frac{5}{1000}$ au bout de $\frac{4}{100}$ de seconde, etc. Mais quand même cette inconnue seroit déterminée, on ne tiendrait encore rien, puisque dt n'est point l'élément du temps pendant lequel le corps M a roulé sur la partie convexe $ACDL$ du poligône, mais l'élément du temps pendant lequel il auroit roulé sur le plan HDL par un mouvement uniformément accéléré.

CXIII.

Le raisonnement que nous venons de faire, a également lieu lorsque la force accélératrice

M

va en diminuant ; car alors elle peut se représenter par l'action de la pesanteur agissant sur le corps M , et le faisant rouler dans la partie concave $BQESF$ d'un polygone quelconque, et il est bien évident que pour avoir l'élément du de la vitesse de ce corps, il ne faut pas le considérer dans les instants infiniment petits, pendant lesquels il parcourt chaque côté du polygone, mais dans l'instant où il passe d'un côté à l'autre, par exemple du côté ES au côté ST , c'est-à-dire, qu'il ne faut pas le considérer dans les instants où la force accélératrice qui agit sur lui, est constante, mais dans ceux où elle varie. Supposons donc que le corps M , en partant du point B , roule jusqu'en S , c'est-à-dire, jusqu'à l'extrémité du côté ES ; que la vitesse dont il est animé en y arrivant, est u , et que la force accélératrice qui agit sur lui en ce même point, est p . La ligne BR étant horizontale, il est certain que le corps M auroit acquis la même vitesse u , en roulant sur le plan RE , et étant poussé par la force accélératrice constante p . Supposons maintenant que ce même corps quittant le côté ES , commence à rouler sur le côté ST pendant un instant infiniment petit dt ; la force accélératrice p ou l'action de la pesanteur sur le corps M , sera plus petite qu'elle ne l'étoit avant cet instant, elle deviendra $p - \frac{p}{m}$, m étant

encore un nombre quelconque. Mais le corps M étant poussé pendant l'instant dt par la force accélératrice $p - \frac{p}{m}$, le degré de vitesse qui lui sera communiqué par cette force pendant l'instant dt , sera exprimé par $(p - \frac{p}{m}) dt$. Donc si nous appellons du ce degré de vitesse, nous avons $du = (p - \frac{p}{m}) dt = p dt - \frac{p dt}{m}$, et non pas simplement $du = p dt$, comme le prétendent les mécaniciens.

C X I V.

Tout ce que nous disons ici est également vrai, quelle que soit la nature des polygones $ADLB$, $BESF$ et quel que soit le nombre de leurs côtés. Or si ce nombre de côtés est infini, les polygones seront représentés par les courbes $ADLB$, $BESF$ (*Fig. 1, 2, 3*), les lignes HD et RE seront tangentes à ces courbes, et DL et ES seront des lignes infiniment petites, qui appartiendront également à la tangente et à la courbe. Or pour avoir l'élément de la vitesse, il ne faut pas considérer le corps dans les instants infiniment petits, pendant lesquels on suppose qu'il parcourt le côté infiniment petit DL ou ES , mais dans l'instant où il passe du côté DL ou ES au côté qui le suit immédiatement, c'est-à-dire, que puisqu'on suppose la force accé-

M 2

lératrice variable, comme elle l'est en effet dans le cas présent, il faut bien, pour avoir l'élément de la vitesse, considérer le corps dans l'instant où la force accélératrice varie, et non dans ceux où, par des subdivisions illusoires, on peut la supposer constante. Mais lorsque le corps M passe du côté DL ou ES , au côté qui le suit immédiatement, la force accélératrice p devient $p \pm \frac{p}{m}$, et l'élément de la vitesse est égal à $dt \left(p \pm \frac{p}{m} \right)$; donc quelle que soit la force accélératrice p qui agit sur un corps M à l'instant où il a acquis la vitesse u , de quelque manière que cette force varie, soit en plus soit en moins, l'accroissement du de la vitesse au bout d'un instant infiniment petit dt , sera toujours exprimé par cette équation $du = p dt \pm \frac{p dt}{m}$, le signe $+$ étant pour les cas où la force accélératrice va en augmentant, et le signe $-$ pour ceux où elle va en diminuant. Mais il faut toujours prendre garde que dt n'est point l'élément du temps pendant lequel le corps M a acquis la vitesse u par un mouvement varié, en roulant sur la courbe ADL ou BES , mais l'élément du temps pendant lequel ce corps a acquis la même vitesse u par un mouvement uniformément accéléré, en roulant sur le plan HDL ou RES .

C X V.

Le mouvement d'un corps qui roule sur le plan *HDL* ou *RES*, étant uniformément accéléré, si nous appellons p la force accélératrice qui agit sur ce corps, t le temps qu'il a employé à parcourir le plan *HDL* ou *RES*, e la longueur de ce plan, et u la vitesse dont il est animé au point L ou S , nous avons (LXXXVII et LXXXVIII) $u = pt$, et $e = \frac{u^2}{2p}$. Si nous concevons maintenant que le corps M quitte le plan *HDL* ou *RES*, et commence à rouler sur la courbe *LB* ou *SF* pendant un instant infiniment petit dt , la force accélératrice p ne sera plus la même, elle deviendra plus grande, si le corps M commence à rouler sur la courbe *LB*, et plus petite, s'il commence à rouler sur la courbe *SF*. Or pour avoir l'élément du de la vitesse, ou le degré de vitesse acquis pendant l'instant infiniment petit dt , il suffit de différencier l'équation $u = pt$, en regardant p comme variable, puisqu'elle commence à l'être pendant l'instant dt ; on a donc $du = p dt \pm t dp$, et par conséquent $p = \frac{du \mp t dp}{dt}$, comme nous l'avons trouvé ci-dessus (XCXVI). De même pour avoir l'élément de l'espace e parcouru pendant le temps t , ou l'espace de , que le corps parcourra pendant l'instant dt , il suffit de différencier l'équa-

tion $e = \frac{r^2}{2}$, en regardant p comme variable; nous avons donc $de = p dt \pm \frac{r^2 dp}{2}$, équation qui donne $pt = \frac{de}{dt} \mp \frac{r^2 dp}{2dt}$, et puisque $pt = u$, on a aussi $u = \frac{de}{dt} \mp \frac{r^2 dp}{2dt}$, comme nous l'avons trouvé (XCXIII).

Conclusion.

On voit par cet article, tiré de notre Ouvrage sur la mécanique, que les deux équations $u = \frac{de}{dt}$, $du = p dt$, sont fausses toutes les fois que le mouvement est varié; ou, ce qui est la même chose, toutes les fois que les corps sont animés par des forces accélératrices variables. D'où il suit que tous les calculs que les mécaniciens ont faits pour déterminer les mouvements variés, en s'appuyant sur ces deux équations, sont faux, et que les problèmes dont ils ont prétendu donner la solution par ces calculs, sont encore à résoudre, à moins qu'ils ne soient d'ailleurs résolus par quelque autre méthode indépendante des équations $u = \frac{de}{dt}$, $du = p dt$.

En parlant des mouvements uniformément retardés, nous ferons voir que dans ces mouvements, comme dans ceux qui sont

uniformes ou uniformément accélérés, on a $u = \frac{de}{dt}$, et $du = p dt$. On pourroit donc faire usage de ces équations pour déterminer les mouvements uniformément retardés. Mais les mécaniciens commettent encore ici une faute très-grande ; ils regardent la quantité de comme l'élément de l'espace parcouru par le mobile depuis l'origine du mouvement, tandis que c'est l'élément de l'espace qui lui reste encore à parcourir jusqu'à l'instant où il doit s'arrêter ; de même ils regardent dt comme l'élément du temps qui s'est écoulé depuis l'origine du mouvement, tandis que c'est l'élément du temps pendant lequel le mobile doit encore se mouvoir jusqu'à ce qu'il s'arrête. Ainsi, de la manière dont les mécaniciens font usage des deux équations $u = \frac{de}{dt}$, $du = p dt$ dans les mouvements uniformément retardés, on peut dire qu'elles sont fausses, et elles le sont en effet ; car en représentant par e l'espace parcouru par un corps dont le mouvement est uniformément retardé, par t le temps qu'il a mis à le parcourir, et par u la vitesse dont il est animé au bout de ce temps, ils disent tout de suite que $u = \frac{de}{dt}$, et que $du = p dt$, ce qui est absolument faux. Pour que ces équations soient vraies dans le mouvement dont nous parlons, il faut que la

quantité e représente l'espace que le corps doit encore parcourir jusqu'à l'extinction de son mouvement , et que t indique le temps pendant lequel il parcourra cet espace. Les mécaniciens prennent donc ici les choses à contre sens , et voilà pourquoi nous disons que les deux équations $u = \frac{de}{dt}$, $du = p dt$ sont fausses dans la maniere dont ils s'en servent pour calculer les mouvements uniformément retardés.

S E C O N D A R T I C L E

*Tiré de l'Ouvrage que nous nous proposons
de donner sur la Méchanique.*

De la résistance des Fluides.

IL s'agit ici de déterminer la résistance qu'un corps éprouve de la part de l'eau, ou de tout autre fluide, dans lequel il se meut. J'avois toujours cru que cette question ne pouvoit se résoudre que par l'expérience, aidée de quelques raisonnemens fort simples, et non par des calculs. Pascal, qui a donné un traité de *l'Equilibre des Liqueurs*, n'entreprend point de résoudre ce problème; et s'il eût voulu le faire, il auroit employé non les calculs, mais l'expérience. Ce grand génie avoit l'esprit trop juste et trop pénétrant pour ne pas voir que cette question, sur-tout dans son premier état de simplicité, ne donne absolument aucune prise aux calculs.

Mais les géometres de ce siècle se sont crus plus habiles; ils ont entrepris de déterminer la résistance qu'un corps quelconque éprouve

de la part d'un fluide, dans lequel il se meut avec une vitesse connue. Voyons comment ils y ont réussi; et puisque Bezout n'a travaillé sur cet objet, qu'après un grand nombre de mathématiciens très-illustre, tels que Bernouilli, d'Alembert, etc. Attachons-nous à sa démonstration, qui ne peut pas être inférieure à celles de ces fameux géomètres qui l'ont précédé.

Démonstration de Bezout (Méch. t. 2. p. 28).

- « 395. Concevons qu'un corps M (Fig. 6)
 » terminé par une surface plane AB , choque
 » perpendiculairement à cette surface, une
 » couche de corps infiniment petit et sans
 » ressort, dont la somme totale des masses
 » soit m . La vitesse qu'il a avant le choc
 » étant V , celle qu'il aura après le choc
 » (278) sera $\frac{MV}{M+m}$. Donc celle qu'il aura per-
 » due sera $V - \frac{MV}{M+m}$, c'est-à-dire, $\frac{mV}{M+m}$, ou
 » simplement $\frac{mV}{M}$, parce que nous suppo-
 » sons que m est infiniment petite à l'égard
 » de M . Donc la quantité de mouvement
 » que M aura perdue, ou la résistance qu'il
 » aura éprouvée, sera $\frac{mV}{M} \times M$, ou mV .
 » Si l'on conçoit maintenant que pendant
 » un temps infiniment petit, le corps M

» s'avance de la quantité infiniment petite Bb ;
 » et qu'à chaque pas la couche des particules
 » qu'il a choqué d'abord, s'anéantisse pour
 » faire place à une autre qui soit choquée à
 » son tour; il est clair que de B en b , la vi-
 » tesse ne pouvant diminuer qu'infiniment
 » peu, la perte de mouvement que le corps
 » fera à la rencontre de chaque couche, sera
 » la même, et égale à mV ; donc la somme
 » des résistances que lui auront faites les
 » couches qu'il aura rencontré de B en b ,
 » sera mV répétée autant de fois qu'on peut
 » concevoir de particules dans l'espace Bb .
 » Or si on appelle a l'épaisseur infiniment
 » petite de chaque particule, $\frac{Bb}{a}$ exprimera
 » le nombre de celles qui peuvent être ran-
 » gées sur Bb ; on aura donc $mV \times \frac{Bb}{a}$,
 » pour la résistance que M aura éprouvée
 » pendant une durée infiniment petite. Mais
 » (191) la masse m de la première couche
 » est égale au volume de cette couche, mul-
 » tiplié par sa densité; c'est-à-dire, en nom-
 » mant D cette densité, et S la surface AB ,
 » est égale à $D \times S \times a$; donc $m = D Sa$;
 » donc la résistance que j'appelle R , devient
 » $R = D SaV \times \frac{Bb}{a} = DS V \times Bb$.

« Observons maintenant que Bb étant l'es-
 » pace parcouru par le corps pendant un
 » temps infiniment petit, que je représente

» par dt , pendant lequel la vitesse doit (210)
 » être supposée uniforme, on a $Bb = V dt$
 » (210). Donc la résistance $R = DSV^2 dt$.
 » Donc l'expression $DSV^2 dt$ exprime
 » généralement la résistance qu'éprouve à
 » chaque instant le corps M , mu dans un
 » fluide dont la densité est D .

« 397. Donc, par la même raison ; si un
 » autre corps se meut avec une vitesse u
 » dans un autre fluide dont la densité soit D' ,
 » et présente perpendiculairement une sur-
 » face s ; on aura, en nommant r la résis-
 » tance qu'il éprouve pendant un pareil ins-
 » tant dt , $r = D'su^2 dt$. D'où l'on conclura
 » $R:r::DSV^2 dt:D'su^2 dt::DSV^2:D'su^2$,
 » c'est-à-dire, que si deux corps se meuvent
 » avec des vitesses différentes V et u , dans
 » deux fluides dont les densités soient D et
 » D' , et présentent perpendiculairement des
 » surfaces S et s ; les résistances qu'ils éprou-
 » veront dans un même instant, seront comme
 » les densités multipliées par les surfaces, et
 » multipliées par les quarrés des vitesses.

» 398. Donc si la surface est la même, et la
 » densité la même, les résistances seront comme
 » les quarrés des vitesses ; car alors on aura
 » $R:r::DSV^2 dt:DSu^2 dt::V^2:u^2$. Donc
 » les résistances qu'un même corps éprouve
 » successivement de la part d'un même fluide,
 » dans des instants égaux, sont comme les
 » quarrés des vitesses. »

Ainsi finit ce long raisonnement de Bezout ; il vouloit en venir au principe du quarré de la vitesse , et il croit l'avoir démontré ; mais rien n'est plus illusoire que cette prétendue démonstration , comme on va le voir par les observations suivantes.

I.

Est-il bien certain d'abord que mV exprime réellement la résistance que le corps M , animé de la vitesse V , éprouve à la rencontre de chaque tranche infiniment mince m du fluide ? Il nous seroit facile de montrer que cela n'est ni prouvé , ni exact. Mais en admettant comme vrai ce principe fondamental du raisonnement de Bezout , sa démonstration n'en est pas moins souverainement ridicule.

Cet auteur suppose que le corps M s'avancant de la quantité infiniment petite Bb , à chaque pas , la couche des particules qu'il a choquée d'abord , s'anéantit pour faire place à une autre qui est choquée à son tour. Assurément rien n'est moins conforme à la vérité que cette hypothèse ; tout le monde sait au contraire qu'une couche de fluide étant choquée par un solide , reflue contre les couches adhérentes , d'où il résulte une résistance bien plus grande que si chaque couche s'anéantissoit après le choc instantané. Cette seule difficulté auroit dû , ce me semble , ar-

rêter tout court un géomètre qui n'auroit pas eu la manie des calculs.

I I.

Bezout n'a pas pris garde que son expression finale $R = DS\dot{V}^2 dt$, est absurde. Voici comme je le prouve.

L'expression $DS\dot{V}^2 dt$ est composée de quatre facteurs, qui sont tous des nombres finis, entiers, ou fractionnaires. Car d'abord en prenant pour l'unité la densité de l'eau, nous pouvons supposer que le corps M se meut dans un fluide, 2 fois, 3 fois, 4 fois, etc. plus dense, et par conséquent D vaudra 2, ou 3, ou 4, etc. La surface S peut être supposée de deux pouces sur deux pouces, et par conséquent $S = 4$. La vitesse V du corps M peut être de 2, ou 3, ou 4, etc. pieds par seconde; ainsi nous pouvons supposer $V = 2$, ou $V = 3$, ou, etc. A l'égard du facteur dt , quoiqu'il indique un temps infiniment petit, cela n'empêche pas qu'il ne doive être pris ici pour un nombre positif fini, entier ou fractionnaire; car il exprime ou une unité de temps infiniment petite, ou plusieurs unités de temps infiniment petites, ou une fraction de l'unité de temps infiniment petite. Nous pouvons donc mettre à la place de dt , les nombres 1, 2, 3, 4, etc., ou $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$, etc. Mais Bezout dit (pag. 37) que l'on peut faire $dt = 1$. Tenons-

nous en donc à cette valeur ; et à l'égard des autres facteurs , faisons $D = 5$, $S = 4$, $V = 3$; l'expression $R = DSV^2 dt$ devient donc $R = 5 \times 4 \times 9 \times 1 = 180$. Or ce résultat est absurde ; car par l'hypothèse le corps M s'avancant d'une quantité infiniment petite Bb , choque un petit nombre de tranches de fluide infiniment minces, qui s'anéantissent après le choc. La résistance qu'il éprouve ne peut donc être qu'infiniment petite , et par conséquent nous devrions avoir $R = \frac{1}{\infty} = 0$; au lieu de cela nous avons $R = 180$, et nous aurions même des résultats beaucoup plus considérables , si nous donnions des valeurs plus grandes aux facteurs D , S , V ; c'est-à-dire , que la formule nous indique une résistance finie et même très-grande , tandis que cette résistance doit être infiniment petite. Et remarquez qu'à cette première absurdité, s'en joint une seconde ; car puisqu'il n'y a rien dans l'équation qui fixe le nombre de tranches choquées par le corps M , il s'ensuit que ce corps éprouvera toujours la même résistance, quelle que soit la quantité de couches choquées ; c'est-à-dire , par exemple , que si le corps M choque deux couches infiniment minces, il éprouvera la même résistance que s'il en choquoit 20 , 30 , 50 , etc.

Bezout n'a pas pris garde que le corps qui produit la résistance R , doit entrer comme facteur dans l'expression de cette résistance ;

car puisque celle-ci est proportionnelle à la masse du corps choqué, il faut bien que la masse de ce corps soit un des facteurs de la formule, sans quoi la masse pourroit varier à l'infini, et la résistance rester toujours la même. Or dans l'expression $R = DSV^2 dt$, je ne vois rien qui représente la masse du corps choqué; je ne trouve que le facteur S , c'est-à-dire, une surface mathématique, sans aucune épaisseur, dont la résistance est par conséquent nulle. Qu'on y prenne garde, une simple surface ne peut pas résister, puisque ce n'est point un corps, et l'expression de sa prétendue résistance est une vraie chimère. Aussi la formule $R = DSV^2 dt$ est-elle absurde, comme nous venons de le démontrer.

Si Bezout eût conservé l'équation.....
 $R = DSV \times V dt$, au lieu de la changer en celle-ci $R = DSV^2 dt$, il n'y auroit point eu d'absurdité; car en regardant $V dt$ comme un seul facteur, qui fait ici la fonction de Bb , et substituant Bb à la place de $V dt$, on retombe dans l'expression $R = DSV \times Bb$, que Bezout a trouvé d'abord, et qu'il auroit dû conserver. Or cette dernière expression de la résistance est composée des quatre facteurs D, S, V, Bb , dont les trois premiers sont des quantités finies, et le quatrième une quantité infiniment petite, puisque, selon Bezout, Bb est un espace infiniment petit. Le produit $DSV \times Bb$ de tous ces facteurs est donc infiniment petit,

et

et par conséquent la résistance R est infiniment petite, ce qui doit être en effet.

Ainsi l'absurdité qui résulte de l'expression $R = DSV^2dt$, ne se trouve point dans l'expression $R = DSV \times Vdt$, pourvu que l'on regarde Vdt comme un seul facteur qui fait la fonction de Bb , et que dans les différentes applications de cette formule, on ait soin de mettre toujours Bb à la place de Vdt . Mais alors pourquoi ne pas employer tout de suite la formule $R = DSV \times Bb$, et pourquoi la remplacer par celle-ci $R = DSV \times Vdt$? On en voit la raison; Bezout vouloit avoir une expression qui renfermât le quarré V^2 de la vitesse, et parce que la dernière expression renferme deux fois le facteur V , il la substitue à la première, croyant que l'équation $R = DSV \times Vdt$ peut se changer en celle-ci $R = DSV^2dt$. Mais il n'a pas pris garde que ce changement ne peut pas avoir lieu, puisque l'équation $R = DSV^2dt$ est absurde, comme nous venons de le faire voir, et que pour ôter cette absurdité, il faut ramener l'équation $R = DSV^2dt$ à celle-ci
 $R = DSV \times Vdt$, ou plutôt à celle que l'on avoit trouvée d'abord, savoir $R = DSV \times Bb$.

III.

Mais suivons attentivement la démonstration de Bezout. Il se propose de déterminer la résistance directe des fluides, et pour cet

effet, il suppose que le corps M animé d'une vitesse constante V , et terminé par une surface plane AB , choque perpendiculairement à cette surface une couche de fluide infiniment mince, dont la masse est m . Il suppose de plus que l'espace infiniment petit Bb parcouru par le corps M , renferme un nombre indéterminé de couches infiniment minces, et que le corps M éprouve à la rencontre de chaque couche une même résistance exprimée par mV ; d'où il conclut que *la somme des résistances que lui auront faites les couches qu'il aura rencontrées de B en b , sera mV répétée autant de fois qu'on peut concevoir de particules dans l'espace Bb .*

Bezout n'a pas pris garde que la question n'est pas de déterminer *la somme des résistances*, que le corps M éprouve en choquant plusieurs tranches de fluide, mais de fixer la résistance que ce même corps éprouve constamment de la part du fluide, celle qui a lieu à chaque instant du mouvement, et par conséquent celle que le corps éprouve à la rencontre de chaque tranche infiniment mince. Or, suivant cet auteur, la résistance qui a lieu à la rencontre de chaque tranche infiniment mince, est mV ; donc l'expression de la résistance est $R = mV$, puisque c'est avec la force constante mV qu'il faudroit pousser le corps M pour le faire avancer dans le fluide avec la vitesse V .

Le nombre des tranches renfermées dans l'espace Bb , étant indéterminé, nous pouvons le supposer aussi grand que nous le voudrons. Supposons donc que l'espace Bb renferme un million de tranches infiniment minces. Le temps que le corps M mettra à parcourir l'espace Bb , en se mouvant dans le fluide, sera aussi partagé en un million de parties égales, ou d'instants infiniment petits. Chaque tranche sera rompue pendant un de ces instants, et le corps les parcourra toutes avec une vitesse constante V . Quelle sera la résistance instantanée ? ce sera mV , selon Bezout. Quelle sera la somme des résistances ? un million de fois mV ou $1000000 mV$. Voilà donc deux expressions très-différentes ; l'une indique la somme de toutes les résistances successives, l'autre la résistance instantanée. Or c'est de celle-ci uniquement qu'il s'agit ici, l'autre ne revient point à la question ; car l'expression que l'on cherche, est celle qui indique la force avec laquelle il faudroit pousser constamment le corps M , pour le faire avancer dans le fluide avec la vitesse V . Or il est de la dernière évidence que cette force impulsive devoit être, selon les principes même de Bezout, mV , et non $1000000 mV$.

I V.

Admirez l'adresse de cet auteur ; il suppose

que Bb est infiniment petite, d'où vous pourriez conclure avec assez de raison que Bb est la plus petite épaisseur possible, celle que l'on conçoit comme la plus petite de toutes. Mais ce n'est point cela, Bb contient, selon Bezout, un nombre indéterminé de tranches infiniment minces, dont l'épaisseur est a , ne prenant pas garde que cette subdivision, qui n'est qu'idéale, pourroit se faire à l'infini; car on pourroit dire de même que l'épaisseur infiniment petite a contient un nombre indéterminé de tranches infiniment minces, dont l'épaisseur est c ; que l'épaisseur c contient un nombre indéterminé de tranches, dont l'épaisseur est h ; que, etc. à l'infini. Mais pourquoi Bezout a-t-il eu recours à une subtilité aussi ridicule? c'est afin de nous persuader que son équation finale est l'expression de la somme des résistances de plusieurs tranches infiniment minces. Il a senti apparemment que s'il ne calculoit que la résistance d'une tranche infiniment mince et indivisible dans son épaisseur, il n'auroit pas l'expression de la résistance propre des fluides, et en cela il avoit raison. Il a donc cru que pour avoir cette résistance, il falloit calculer celle qui a lieu pendant un certain mouvement infiniment petit, à la vérité, mais divisible. Voilà pourquoi il suppose que Bb contient un nombre indéterminé de tranches, dont l'épaisseur est a . Mais d'abord si son calcul donnoit réelle-

ment l'expression de la somme des résistances de plusieurs tranches infiniment minces , il ne satisferoit pas à la question ; car , comme nous venons de le faire voir , il ne s'agit pas ici de déterminer la somme des résistances que le corps M éprouvé en choquant plusieurs tranches de fluide , mais de fixer la résistance que ce même corps éprouve constamment de la part du fluide , celle qui a lieu à chaque instant de son mouvement , et par conséquent celle qu'il éprouve à la rencontre de chaque tranche infiniment mince.

En second lieu , c'est par une illusion grossiere que Bezout s'est imaginé que son calcul donne l'expression de la somme des résistances de plusieurs *couches* infiniment minces. Il n'exprime réellement que la résistance d'une seule tranche considérée comme un corps solide et absolument isolé. Bezout suppose que l'épaisseur infiniment mince Bb de cette couche , se décompose en un certain nombre de couches plus minces , dont l'épaisseur est a ; mais le calcul ne suppose point cela , et le dernier résultat de ce calcul n'est au fond que l'expression générale mV de la résistance d'un solide infiniment mince , mise sous une autre forme à l'aide de quelques petites substitutions , comme il est aisé de s'en convaincre.

En effet la résistance que le corps M éprouve en choquant la première tranche m du fluide ,

étant représentée par R , on a, selon le premier calcul de Bezout, $R = mV$. Mais la masse de la tranche infiniment mince m est égale au produit de sa densité D par sa surface S exposée au choc, et par son épaisseur, qu'il nous est libre de représenter par a , nous avons donc $m = D Sa$, et par conséquent $R = D SaV$. Or si nous supposons, à l'exemple de Bezout, que l'épaisseur a est égale à l'espace parcouru par le corps M pendant un instant infiniment petit dt , nous avons $a = Vdt$, et par conséquent $R = DSV \times Vdt$. Or il nous seroit facile, à l'imitation de Bezout, de changer cette expression en celle-ci $R = DSV^2dt$; mais nous nous en donnerons bien de garde, puisque l'expression $R = DSV^2dt$ est souverainement absurde, comme nous l'avons montré.

On voit donc par-là que Bezout auroit pu arriver à son équation favorite $R = DSV^2dt$, par une route beaucoup plus courte que celle qu'il a choisie. Mais elle auroit moins prêté à l'illusion, et il falloit jeter de la poudre aux yeux, et s'en imposer en quelque sorte à soi-même, en entassant distinctions sur distinctions, et se perdant dans l'immensité des infiniment petits.

V.

Bezout conclut (pag. 31) : « Donc l'expres-

» sion DSV^2dt , exprime généralement la
 » résistance qu'éprouve à chaque instant, le
 » corps M , mu dans un fluide dont la densité
 » est D .

» Donc, par la même raison, si un autre
 » corps se meut avec une vitesse u , dans un
 » autre fluide dont la densité soit D' , et pré-
 » sente perpendiculairement une surface s ,
 » on aura, en nommant r la résistance qu'il
 » éprouve pendant un pareil instant dt ,
 » $r = D'su^2dt$. D'où l'on conclura
 » $R:r::DSV^2dt:D'su^2dt::DSV^2:D'su^2$.
 » C'est-à-dire ; que si deux corps se meuvent
 » avec des vitesses différentes V et u , dans
 » deux fluides dont les densités soient D et
 » D' , et présentent perpendiculairement des
 » surfaces S et s ; les résistances qu'ils éprou-
 » veront dans un même instant, seront comme
 » les densités multipliées par les surfaces, et
 » multipliées par les quarrés des vitesses.

» 398: Donc si la surface est la même, et la
 » densité la même, les résistances seront
 » comme les quarrés des vitesses ; car alors on
 » aura $R:r::DSV^2dt:DSu^2dt::V^2:u^2$.
 » Donc les résistances qu'un même corps
 » éprouve successivement de la part d'un
 » même fluide, dans des instants égaux, sont
 » comme les quarrés des vitesses ».

Voici de quelle maniere Bezout devoit con-
 clure: l'expression $R = DSV^2dt$ est absurde,

il faut donc l'abandonner , et en revenir à l'équation $R = DSV \times Bb$, laquelle doit exprimer généralement la résistance qu'éprouve à chaque instant le corps M , mu dans un fluide , dont la densité est D . Donc par la même raison , si un autre corps se meut avec la vitesse u dans un autre fluide , dont la densité soit D' , et présente perpendiculairement une surface s , on aura , en nommant r la résistance qu'il éprouvera pendant un pareil instant dt , et $B'b'$ l'espace qu'il parcourra pendant cet instant , $r = D'su \times B'b'$. D'où l'on conclura $R:r::DSV \times Bb:D'su \times B'b'$. Donc si la surface est la même , les résistances seront comme les produits $V \times Bb$ et $u \times B'b'$; car alors on aura.....
 $R:r::V \times Bb:u \times B'b'$.

Voyons maintenant ce que signifient les quantités Bb , $B'b'$. Selon Bezout , Bb est l'espace que le corps M parcourt pendant l'instant dt . Or il est évident que cet espace doit être proportionnelle à la vitesse ; nous avons donc nécessairement $Bb : B'b'::V : u$, et $V \times Bb : u \times B'b'::V^2 : u^2$, donc $R:r::V^2 : u^2$. Vous voilà donc d'accord avec Bezout , medira-t-on ; vous arrivez comme lui au carré de la vitesse , et par conséquent vous avez eu tort d'attaquer sa démonstration.

Je réponds que cette démonstration n'en est

est pas moins absurde. Quel étoit le but de cet auteur, et que devoit-il se proposer ? De déterminer la résistance que le corps M éprouve constamment de la part du fluide, celle qui a lieu à chaque partie du mouvement, et par conséquent celle que le même corps éprouve à la rencontre de chaque tranche infiniment mince. Or ici la quantité R n'indique point cela, elle désigne la somme des résistances que le corps M éprouve en parcourant l'espace Bb pendant l'unité de temps dt . D'où il suit que, 1°. si nous supposons que la vitesse est 1, l'espace Bb sera aussi 1, et la résistance R sera indiquée par 1 ; 2°. si la vitesse devient double, Bb deviendra aussi double, et la résistance, qui est toujours comme $V \times Bb$, deviendra quatre fois plus grande, et sera représentée par 4. Mais puisque dans ce second cas l'espace Bb est 2, il contient nécessairement deux tranches de fluide, et la résistance que le corps M éprouve en rompant ces deux tranches étant 4, selon Bezout, celle qu'il éprouve en n'en rompant qu'une seule est 2 ; donc la résistance qu'il éprouve en rompant chaque tranche successive, est 2, c'est-à-dire ; comme la vitesse V , et non comme le carré V^2 de la vitesse ; 3°. enfin si nous supposons que cette vitesse devienne cent fois plus grande, l'espace Bb parcouru pendant l'unité de temps dt , sera aussi cent fois plus grande, et la résistance R

qui, selon Bezout, est toujours comme $V \times Bb$, sera 10000 fois* plus grande. Mais puisque l'espace Bb est 100 fois plus grand, il doit contenir 100 tranches de fluide ; donc si la somme de résistance que le corps éprouve en rompant toutes ces tranches, est représentée par 10000, celle qu'il éprouve à la rencontre de chaque tranche successive, est exprimée par 100, c'est-à-dire que, d'après les principes de Bezout, elle est comme la vitesse V , et non comme le quarré V^2 de cette vitesse.

V I.

On voit donc que Bezout confond ici deux especes de résistances ; la résistance constante et uniforme, celle qui a lieu à la rencontre de chaque tranche, avec la résistance que le corps M éprouve pendant une même unité de temps, représentée par dt , et il nous donne, pour l'expression de la premiere, une fausse expression de la seconde. Il a dû avoir et a certainement eu l'intention de calculer la premiere de ces deux résistances, et pour y parvenir, il calcule l'effet de la seconde. Mais son calcul à cet égard est évidemment erroné, et cette erreur fait qu'il arrive au quarré de la vitesse. C'est le but qu'il vouloit atteindre, parce que l'expérience démontre qu'en effet la résistance des fluides est comme le quarré de la vitesse. Mais Bezout

n'arrive à ce but tant désiré, que parce que, dans son calcul, une erreur se trouve compensée par une autre.

Il y a donc, dans la démonstration de cet auteur, une double erreur ; 1°. il se trompe dans l'expression qu'il nous donne de la résistance que le corps M éprouve en choquant la première tranche de fluide, dont la masse est représentée par m . Il déduit sa formule des principes qu'il a posés sur le choc des corps ; mais ces principes sont faux, et en consultant la véritable théorie du choc des corps, telle que nous la donnons dans notre Ouvrage, nous trouvons que le corps M , en choquant la première tranche de fluide dont la masse est m , éprouve une résistance proportionnelle au carré de sa vitesse, en sorte que cette résistance est exprimée par mV^2 , et non par mV , comme le prétend Bezout. La résistance constante et uniforme, celle qui a lieu à la rencontre de chaque tranche, est donc indiquée par la formule mV^2 , et non par mV .

2°. Le nombre des tranches que le corps M choquera pendant une même unité de temps, est nécessairement proportionnelle à sa vitesse ; car il est bien évident que si cette vitesse augmente successivement comme les nombres 1, 2, 3, 4, 5, etc., le nombre des tranches choquées pendant la même unité

de temps, sera comme ces mêmes nombres 1, 2, 3, 4, 5, etc. Mais puisque la résistance que le corps M éprouve à la rencontre de chaque tranche successive, est mV^2 , la somme des résistances qu'il éprouvera pendant la même unité de temps, est évidemment.....
 $mV^2 \times V = mV^3$; et ceci sera toujours vrai, quelle que soit la durée de l'unité de temps que l'on prend pour mesure. Ainsi, que cette unité de temps soit d'une durée finie, infinie ou infiniment petite, la somme de résistance que le corps M éprouvera pendant la même unité de temps, se trouvera toujours exprimée par mV^3 , et non par mV^2 , c'est-à-dire, qu'elle est toujours proportionnelle au cube de la vitesse, et non à son quarré. Donc Bezout se trompe, quand il dit que *les résistances qu'un même corps éprouve successivement de la part d'un même fluide, dans des instants égaux, sont comme les quarrés des vitesses*, et c'est là la seconde erreur qui se trouve dans sa démonstration.

On voit donc clairement la fausseté des principes de Bezout sur cette matiere. Selon lui, la masse de chaque tranche de fluide étant représentée par m , la résistance que le corps M éprouve en la rompant, est $R = mV$; selon l'expérience et selon l'exacte théorie, cette résistance est $R = mV^2$. Selon Bezout, la somme de résistance que le mobile M éprouve pendant une même unité de temps, est

$R = mV^2$; selon l'expérience et l'exacte théorie, cette seconde résistance est $R = mV^3$.

Concluons delà qu'il faut rejeter, comme fausses, ces deux propositions, par lesquelles cet auteur termine sa démonstration (397 et 398).

« 1°. Si deux corps se meuvent avec des vitesses différentes V et u , dans deux fluides dont les densités soient D et D' , et présentent perpendiculairement des surfaces S et s ; les résistances qu'ils éprouveront, dans un même instant, seront comme les densités multipliées par les surfaces, et multipliées par les quarrés des vitesses.

« 2°. Les résistances qu'un même corps éprouve successivement de la part d'un même fluide, dans des instants égaux, sont comme les quarrés des vitesses. »

La première de ces deux propositions doit être remplacée par celle-ci.

Si deux corps se meuvent avec des vitesses différentes V et u , dans deux fluides, dont les densités soient D et D' , et présentent perpendiculairement des surfaces S et s ; 1°. les résistances qu'ils éprouveront constamment à la rencontre de chaque tranche successive de fluide, se trouveront en multipliant les densités par les surfaces, et ce produit par les quarrés des vitesses ; 2°. les résistances qu'ils

éprouveront dans un même instant, ou pendant la même unité de temps, se trouveront en multipliant les densités par les surfaces, et ce produit par les cubes des vitesses.

La seconde proposition de Bezout doit se remplacer par les deux suivantes.

Les résistances qu'un même corps éprouve constamment à la rencontre de chaque tranche du fluide, dans lequel il se meut, sont comme les quarrés des vitesses.

Les résistances qu'un même corps éprouve dans des temps égaux, ou pendant la même unité de temps, de la part du fluide dans lequel il se meut, sont comme les cubes des vitesses.

Ces trois propositions, que nous jugeons convenable de substituer à celles de Bezout, se démontrent non par des calculs recherchés, mais par un simple raisonnement, et par une multitude d'expériences toutes plus décisives les unes que les autres. Nous invitons les lecteurs, qui veulent s'occuper de cet objet, à consulter celles qui ont été faites en 1776, à l'Ecole Militaire, par ordre et aux frais du gouvernement, sous la direction de d'Alembert, Condorcet et Bossut. Ce dernier, en qualité de rapporteur, a donné au public le recueil de ces expériences, qui paroissent avoir été faites avec beaucoup de soin. Chaque vaisseau placé sur le canal, étoit tiré par un poids

suspendu au bout d'une corde qui passoit par deux poulies de renvoi. Pour entraîner un même vaisseau avec une vitesse double, dans un fluide indéfini (*a*), il falloit constamment un poids quadruple, et même un peu plus ; mais cet excédent, comme l'observe l'auteur du recueil, provient de quelques circonstances particulières, dont on trouve facilement la raison. Ces expériences montrent donc la vérité de notre seconde proposition, et pour peu qu'on veuille réfléchir, on y trouvera également la vérité de la troisième.

En effet un poids qui, en tombant uniformément, entraîne un vaisseau attaché à l'autre bout de la corde, donne exactement la mesure de la résistance que ce vaisseau éprouve constamment de la part du fluide dans lequel il se meut. Si le poids est quadruple, la résistance constante qu'oppose le fluide, est nécessairement quadruple, et c'est ce qui a lieu lorsque la vitesse du poids moteur et du vaisseau est double ; la résistance constante et uniforme est donc comme le carré de la vitesse. Mais lorsque cette vitesse est double, le poids moteur, en tombant, parcourt, pendant la même unité de temps, un espace

(a) On dit qu'un vaisseau est dans un fluide indéfini, lorsque son volume est très-petit, relativement à l'étendue du bassin dans lequel il se meut.

double , et surmonte par conséquent une somme de résistance double de celle qu'il surmonteroit , s'il ne parcouroit que la moitié de cet espace dans le même temps. Donc puisque ce poids est quadruple , lorsque la vitesse est double , la somme de résistance qu'il surmonte pendant la même unité de temps , est huit fois plus grande , c'est-à-dire , qu'elle est comme *le cube de la vitesse* , ainsi que l'énonce notre troisième proposition.

Mais quelle conséquence pouvons-nous tirer de ces principes pour la pratique ? Il en résulte cette vérité générale , que pour donner une fois plus de promptitude à la navigation qui se fait sur des rivières , ou dans des canaux un peu large , il faudroit employer une somme de force quatre fois plus grande , et par conséquent on seroit obligé de faire une dépense quadruple en chevaux.

Supposons , par exemple , que deux chevaux ramenant la gailliotte de Saint-Cloud , à Paris , fassent la moitié du chemin en une heure ; si on vouloit que dans le même espace de temps , c'est-à-dire , en une heure , la gailliotte fût ramenée jusqu'à Paris , il faudroit y appliquer huit chevaux au lieu de deux , et chacun de ces huit chevaux seroit , au bout d'une heure , une fois plus fatigués que les deux premiers ; il auroit donc éprouvé , pendant la même unité de temps , c'est-à-dire ,
pendant

pendant une heure, une somme de résistance double, et comme le nombre des chevaux est quatre fois plus grand dans le second cas que dans le premier, la somme de résistance de la part du fluide pendant la même unité de temps, est donc huit fois plus grande, c'est-à-dire, comme le cube de la vitesse; car ici les deux vitesses sont comme 1 et 2, la résistance constante est comme le nombre des chevaux, comme 2 à 8, comme 1 à 4, ou comme le carré V^2 de la vitesse, et les sommes des résistances qui ont lieu pendant une même unité de temps, sont entre elles comme 1 à 8, ou comme les cubes des vitesses.

Observons maintenant que les deux chevaux en arrivant à Paris, au bout de deux heures, seront aussi fatigués que les huit autres qui y arrivent en une heure; d'où il suit que pour faire aller une fois plus promptement la gailliotte de Saint-Cloud à Paris, et de Paris à Saint-Cloud, il faudra y employer couramment quatre fois plus de chevaux. Selon les principes de Bezout, il suffiroit d'en doubler le nombre (a). Mais un entrepreneur qui se fieroit à ces prétendus principes, et

(a) Selon les principes de cet auteur, les deux chevaux en ramenant à Paris la gailliotte en deux heures, seroient une fois plus fatigués que les huit qui l'y ramènent en une heure. Il faudroit donc relayer les deux chevaux une fois plus souvent, et par conséquent les dépenses en chevaux seroient dans les deux cas, comme 4 à 8, ou comme 1 à 2. Il suffiroit donc, d'après la théorie de Bezout, de doubler la dépense en chevaux pour rendre cette navigation une fois plus prompte.

s'engageroit à rendre la navigation dont nous parlons une fois plus prompte, ne tarderoit pas à se désabuser ; une funeste expérience lui apprendroit bien vite qu'au lieu de quatre chevaux, il lui en faudroit huit.

Je terminerai ici mes observations sur la démonstration de Bezout. Peut être trouvera-t-on que je me suis un peu trop étendu ; mais je prie le lecteur de considérer que cette démonstration est la base de tout le traité de cet auteur sur la résistance des fluides. Elle embrasse le cas le plus simple, celui de la résistance directe, ou de celle qui se fait sur un plan perpendiculaire à la direction du mouvement. Delà l'auteur passe à la résistance indirecte, qui renferme un grand nombre de cas, dont la solution dépend absolument de la démonstration fondamentale. Il falloit donc nous attacher fortement à cette prétendue démonstration, puisqu'en en montrant la fausseté, c'est renverser en quelque sorte tout ce traité de la résistance des fluides, qui occupe plus de 70 pages.

Au reste, on voit que l'erreur fondamentale de Bezout, dans cette démonstration, est d'avoir cru que lorsqu'un corps se meut dans un fluide, la somme de résistance qu'il éprouve pendant un même instant infiniment petit dt , est proportionnelle au quarré V^2 de la vitesse, tandis que cette résistance est proportionnelle au cube V^3 de la vitesse.

F I N.

T A B L E

DES MATIÈRES.

<i>P R É F A C E</i>	page iij
<i>Tableau analytique des nouveaux Prin-</i> <i>cipes de Méchanique,</i>	page i
<i>De la force, comparée avec son effet;</i>	4
<i>Des forces accélératrices constantes,</i>	5
<i>Des mouvements variés, ou des mouve-</i> <i>ments des corps poussés par des forces</i> <i>accélératrices variables,</i>	7
<i>Des forces vives et des forces mortes,</i>	8
<i>Du choc des corps durs,</i>	9
<i>Du choc des corps élastiques,</i>	18
<i>Véritables formules des vitesses des corps</i> <i>élastiques après le choc,</i>	19
<i>Du choc indirect,</i>	29
<i>De la composition et décomposition des</i> <i>forces,</i>	idem
<i>Nouveaux Principes sur la décomposition</i> <i>des forces,</i>	30
<i>Des frottements</i>	41
<i>Analyse d'un Mémoire dans lequel on</i> <i>établit des principes absolument neufs</i> <i>sur les frottements comparés,</i>	47

SECONDE PARTIE.

<i>Contenant quelques articles extraits littéralement de l'ouvrage que l'on se propose de donner au public , etc.</i>	56
<i>Maniere d'exprimer la vitesse dans le mouvement uniformément accéléré, idem</i>	
<i>De la vitesse des corps dans les mouvements variés. Erreurs des Mécaniciens sur cette matiere ,</i>	60.
<i>On prouve la fausseté des deux équations fondamentales sur les mouvements variés ,</i>	62
<i>Second article tiré de l'ouvrage que l'on se propose de donner sur la Mécanique ,</i>	
<i>De la résistance directe des fluides ,</i>	97
<i>Démonstration de Bezout ,</i>	98
<i>Absurdité de cette démonstration ,</i>	101
<i>Fausseté des deux propositions par lesquelles il termine cette démonstration ,</i>	117

Fin de la Table.

605438













